

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA**

Guido Willian Navia Valério

**OBTENÇÃO DE PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS DE
MICROESTRUTURAS VIA HOMOGENEIZAÇÃO**

Florianópolis

2014

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA**

Guido Willian Navia Valério

**OBTENÇÃO DE PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS DE
MICROESTRUTURAS VIA HOMOGENEIZAÇÃO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. D.Sc. Eduardo Alberto Fancello

Coorientador: Paulo de Tarso Rocha Mendonça

Florianópolis

2014

Guido Willian Navia Valério

**OBTENÇÃO DE PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS DE
MICROESTRUTURAS VIA HOMOGENEIZAÇÃO**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 14 de março de 2014.

Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.Eng.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.
Orientador

Paulo de Tarso Rocha Mendonça, Ph.D.
Coorientador

Carlos Rodrigo de Mello Roesler, Dr.Eng.

Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Gean Vitor Salmória, Dr.

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer meus pais, Oscar e Maria José por escolherem ter o terceiro filho. Obrigado pelo amor, educação e fé nas minhas conquistas.

À minha família pelas palavras de apoio e carinho, especialmente Dai-ana, Danielle, Dayane e Halisson.

Aos companheiros de casa; André, Françaó e Lucas, pelas conversas e risadas.

Aos colegas do laboratório GRANTE; Diego, Henrique, Juliana, Maicon, Paulo, Helio, Armin, Leandro, Leonardo, Thaís pela vivência das dúvidas, angustias e conquistas diárias.

Ao meu orientador Eduardo Fancello e coorientador Paulo de Tarso, pelo conhecimento passado e confiança depositada.

Por fim ao POSMEC e UFSC pela possibilidade de realização de um sonho.

RESUMO

O método de homogeneização é uma forma de se obter as propriedades homogeneizadas de uma microestrutura em uma análise multi escala. É aplicado esse modelo para obter as propriedades homogeneizadas de microestruturas compostas de fases viscoelásticas, submetido a um histórico de deformação de amplitudes constantes. Foi utilizado a modelagem multi escala e suas classes de condição de contorno para obter uma metodologia para determinar a relação constitutiva homogeneizada de microestruturas inicialmente elástica linear e por fim viscoelásticas. As análises foram reproduzidas utilizando o método de elementos finitos. Foi demonstrado como aplicar as classes de multi escala e o algoritmo para obtenção das propriedades homogeneizadas. Foram reproduzidos os resultados das análises de alguns artigos, em um dos casos alcançando resultado muito satisfatório. Os resultados obtidos demonstra que a modelagem multi escala é um método que tem a capacidade de prever o comportamento homogeneizado de uma microestrutura, porém com um alto custo computacional.

Palavras-chave: homogeneização, multi escala, viscoelásticidade.

ABSTRACT

The homogenization method is a way to get the properties of a homogenised microstructure in a multi scale analysis. This model is applied to obtain the properties of homogenised composite microstructures of viscoelastic phase, subjected to a history of deformation of constant amplitude. Multi scale modelling was used and its classes of boundary condition for a methodology to determine the constitutive relationship of initially linear elastic microstructures homogenized and finally viscoelastic. The analyses were reproduced using the finite element method. It was demonstrated how to apply multi scale classes and the algorithm for obtaining the homogenized properties. Were reproduced the results of analyses of some articles, in one case reaching a result very satisfactory. The results obtained demonstrates that modeling multi scale is a method that has the ability to predict the behavior of a homogenized, but with a high computational cost.

Keywords: homogenization, multi-scale, viscoelasticity.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVOS	2
1.1.1 Objetivo geral	2
1.1.2 Objetivos específicos	2
2 MODELAGEM MULTI ESCALA ELÁSTICA LINEAR	5
2.1 MODELAGEM MULTI ESCALA	5
2.2 CAMPO DE DESLOCAMENTOS NA MICROESCALA	6
2.3 TENSOR DE DEFORMAÇÃO NA MICROESCALA	8
2.4 EQUILÍBRIO NO RVE	9
2.5 TENSÃO HOMOGENEIZADA	11
2.6 O PRINCÍPIO DE HILL-MANDEL PARA MACRO-HOMOGENEIDADE	11
2.7 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO MECÂNICO	12
2.8 CLASSES DE MODELOS MULTI ESCALA	13
2.8.1 Modelo de Taylor ou deslocamentos uniformes no RVE ...	14
2.8.2 Modelo de deslocamentos lineares no contorno do RVE ...	15
2.8.3 Deslocamentos periódicos no contorno do RVE	16
2.8.4 Modelo de forças externas constantes no contorno do RVE	17
2.9 TENSOR DE ELASTICIDADE HOMOGENEIZADO	18
2.10 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	20
2.10.1 Discretização em elementos finitos	20
2.10.2 Deslocamentos lineares no contorno	21
2.10.3 Deslocamentos Periódicos no contorno do RVE	22
2.10.4 Homogeneização do tensor de elasticidade	25
2.10.5 Aspectos computacionais	26
2.11 EXEMPLO NUMÉRICO	27
2.11.1 Microestruturas	27
2.11.2 Propriedade do material	28
2.11.3 Resultados das análises	29
2.11.3.1 Caso (A)	29
2.11.3.2 Caso (B)	32
2.11.3.3 Caso (C)	34
3 MODELAGEM MULTI ESCALA VISCOELÁSTICA	37
3.1 MODELO REOLÓGICO UNIDIMENSIONAL	37
3.2 MODELO TRIDIMENSIONAL	41
3.3 MODELAGEM MULTI ESCALA VISCOELÁSTICA	44
3.3.1 Definição dos tensores deformação	44

3.3.2 Tensor de tensão viscoelástico	44
3.3.3 Tensor de comportamento dinâmico homogeneizado	45
3.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	46
3.5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS	47
3.6 EXEMPLOS NUMÉRICOS	47
3.6.1 Exemplo numérico	47
3.6.1.1 Exemplo 1	48
3.6.1.2 Exemplo 2	53
3.6.1.3 Exemplo 3	57
3.6.2 Microestruturas tridimensionais	61
3.7 RESULTADOS	65
4 CONCLUSÃO	67
4.1 PROPOSTAS DE ESTUDO	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Domínio da macroescala
Ω_μ	Domínio da microescala
Ω_μ^s	Domínio ocupado pela fase sólida
Ω_μ^v	Domínio ocupado pela fase "vazia" da microestrutura
\mathbf{x}	Vetor posição na macroescala
\mathbf{y}	Vetor posição na microescala
$\partial\Omega_\mu$	Contorno do domínio da microescala
\mathbf{u}_μ	Deslocamentos microscópicos
$\bar{\mathbf{u}}$	Deslocamento linear macroscópico
$\tilde{\mathbf{u}}$	Deslocamento flutuante microscópico
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Tensor deformação flutuante
$\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$	Tensor deformação homogeneizado
$\boldsymbol{\sigma}_\mu$	Tensor tensão microscópico
\mathbf{t}^e	Forças no contorno
\mathbf{b}	Forças de corpo
$\boldsymbol{\eta}$	Deslocamento virtual
\mathbf{t}^v	Forças internas na fase vazia
$\partial\Omega_\mu^v$	Contorno do domínio vazio no sólido
\mathbf{n}	Vetor normal unitário para fora
$\boldsymbol{\sigma}_h$	Tensor tensão macroscópico homogeneizado
$\boldsymbol{\sigma}_\mu$	Tensor tensão microscópico
\mathbb{C}_μ	Tensor de elasticidade de 4ª ordem
V^n	Volume da fase n na micro escala
\mathbb{C}^n	Tensor constitutivo na fase n da micro escala
γ^n	Razão entre volume da fase n e o volume da microescala
\mathbb{C}^T	Tensor de elasticidade de Taylor
$\boldsymbol{\sigma}^T$	Tensor tensão homogeneizado linear
$\partial\Omega^+$	Contorno positivo do RVE
$\partial\Omega^-$	Contorno negativo do RVE
\mathbb{C}_h	Tensor de elasticidade homogeneizado
\mathbf{B}^e	Matriz com as derivadas das funções de forma
\mathbf{C}_μ^e	Matriz de elasticidade do elemento finito
$\tilde{\mathbf{U}}^{ab}$	Vetor de deslocamentos flutuantes
\mathbf{F}^{ab}	Vetor de forças internas originado pela deformação canônica
\mathbf{E}^{ab}	Vetor do tensor deformação macroscópica
\mathbf{U}_p	Vetor de deslocamentos prescritos

\mathbf{U}_f	Vetor de deslocamentos livres
\mathbb{P}	Matriz de projeção
\mathbb{P}_p	Matriz de projeção dos graus de liberdade prescritos
\mathbb{P}_f	Matriz de projeção dos graus de liberdade internos
\mathbf{F}_p	Vetor força externa para os graus de liberdade prescritos
\mathbf{F}_f	Vetor força interna para os graus de liberdade internos
$\tilde{\mathbf{U}}^+$	Vetor de graus de liberdade pertencentes ao contorno positivo
$\tilde{\mathbf{U}}^-$	Vetor de graus de liberdade pertencentes ao contorno negativo
\mathbf{U}_i	Vetor de deslocamento dos nós independentes
\mathbf{U}_d	Vetor dos deslocamentos dependentes
\mathbb{P}_i	Matriz de projeção dos graus de liberdade independentes
\mathbf{U}_d	Matriz de projeção dos graus de liberdade dependentes
\mathbb{C}_{di}	Matriz que relaciona os graus de liberdade independentes com os graus de liberdade dependentes
\mathbf{K}^*	Matriz de rigidez dos graus de liberdade independentes com as contribuições dos graus de liberdade dependentes
\mathbf{F}^*	Vetor de forças dos graus de liberdade independentes com as contribuições dos graus de liberdade dependentes
$\tilde{\mathbb{P}}_f$	Matriz de projeção dos graus de liberdade independentes para graus de liberdade flutuantes
\mathbf{C}^T	Matriz de elasticidade linear homogeneizada
$\tilde{\mathbf{C}}^{ab}$	Matriz de tensão flutuante
$\tilde{\mathbf{C}}$	Matriz de elasticidade flutuante
G_α	Módulo complexo
τ	Variável de integração
$\varepsilon^a(t)$	Deformação alternante
ε_0	Amplitude de deformação
ω	Frequência de deformação
i	Unidade complexa
\hat{G}_α	Módulo complexo constante no tempo
\hat{G}	Módulo complexo variável
G_α^*	Módulo complexo
G'_α	Módulo dinâmico
G''_α	Módulo de perda
$\tan \phi$	Tangente do ângulo de defasagem
\mathbf{s}	Tensor tensão deviatórico
$\bar{\sigma}$	tensor tensão volumétrico
\mathbf{e}	Tensor deformação deviatórico
Θ	tensor deformação volumétrica

\mathbb{G}_1	Tensor dinâmico deviatórico
\mathbb{G}_2	Tensor dinâmico volumétrico
\mathbf{I}	Tensor identidade de 4 ^a ordem
$\mathbf{1}$	Tensor identidade de 2 ^a ordem
\mathbb{G}'	Tensor de elasticidade
\mathbb{G}''	Tensor de perda
δ	Delta de Kronecker

LISTA DE FIGURAS

1	Exemplo de dois domínios utilizados na modelagem multi escala	6
2	Descomposição aditiva da microescala	7
3	Composição do campo de deslocamentos para o modelo de deslocamentos lineares no contorno.	16
4	Entidades envolvidas no classe de modelo de deslocamentos flutuantes periódicos no contorno	17
5	Forças externas constantes no contorno	18
6	Microestruturas analisadas: (A) Quadrada com inclusão circular central; (B) Retangular com inclusão em forma de 'L'; e (C) Quadrado com inclusão em 'Y'.	28
7	Malha da microestrutura com um furo circular com 30% da área.	29
8	Gráficos que relacionam os coeficientes da matriz de rigidez com a fração de área de do furo circular. A esquerda o gráfico de referência retirado do artigo de (YANG; BECKER, 2004a), a direita gráfico originado dos resultados obtidos com o método proposto.	31
9	Malha da microestrutura com inclusão em forma de 'L' com 30% da área.	32
10	Gráficos que relacionam os coeficientes da matriz de rigidez com a fração de área de do furo em forma de 'L'. A esquerda o gráfico de referência retirado do artigo de (YANG; BECKER, 2004a), a direita gráfico originado dos resultados obtidos com a técnica implementada.	33
11	Malha da microestrutura com inclusão em forma de 'Y' com 30% da área.	35
12	Gráfico que relaciona os coeficientes da matriz de rigidez com a fração de área de do furo em forma de 'Y'. Gráfico originado dos resultados obtidos com a técnica implementada.	36
13	Malhas que foram utilizadas nos ensaios numéricos. A malha(a) é o Compósito 1 e 2, em (b) é o Compósito ótimo do exemplo 1, em (c) é o Compósito ótimo do exemplo 2, em (d) é o Compósito ótimo do exemplo 3.	49

14	O gráfico da esquerda mostra a evolução do comportamento do <i>Módulo Dinâmico</i> (linha contínua) e do <i>Módulo de Perda</i> (linha tracejada) em relação da frequência de excitação. No gráfico da direita temos a evolução da tangente em relação com a frequência. Onde a cor azul refere-se ao Compósito 1, o vermelho ao Compósito 2 e o verde ao Compósito Ótimo. A linha preta na vertical representa a frequência de 0.5 onde foram retirados os dados para a Tabela 2.	52
15	O gráfico da esquerda mostra a evolução do comportamento do <i>módulo dinâmico</i> (linha contínua) e do <i>módulo de perda</i> (linha tracejada) em relação da frequência de excitação. No gráfico da direita temos a evolução da tangente em relação com a frequência.	56
16	O gráfico da esquerda mostra a evolução do comportamento do <i>módulo dinâmico</i> (linha contínua) e do <i>módulo de perda</i> (linha tracejada) em relação da frequência de excitação. No gráfico da direita temos a evolução da tangente em relação com a frequência. Em azul representa o Compósito 1, em vermelho o Compósito 2 e em preto o Compósito Ótimo 1.	60
17	Microestrutura proposta.	62
18	O gráfico da esquerda mostra a evolução do comportamento do <i>módulo dinâmico</i> (linha contínua) e do <i>módulo de perda</i> (linha tracejada) em relação da frequência de excitação. Em cor preta representa o comportamento da fase viscoelástica 1, em mangenta a fase viscoelástica 2, as cores azul e vermelha representa o compotamento da mistura onde em azul é a condição de contorno linear e a vermelha é a condição de contorno periódica.	63

1 INTRODUÇÃO

Em diversos ramos da ciência existe a necessidade de conhecer a resposta de um corpo a um determinado estímulo. Inicialmente essa questão era respondida pela observação e criação de modelos para prever o comportamento do fenômeno. Estes modelos dependiam de variáveis internas, e para cada fenômeno tens variáveis diferentes. Particularizando esses fenômenos para áreas como: aeroespacial, automotiva, civil, escoamento de fluidos e outras, esses modelos começavam a ficar mais difícil de ser previsto através e modelagem matemática. Devido essa grande dificuldade de conseguir prever alguns fenômenos são propostos outros modelos. Para determinação de comportamento de material é proposto uma modelagem multi escala. Essa abordagem obtém a resposta constitutiva partindo de hipótese que o material pode ser representado através de duas ou mais escalas de comprimento, onde é possível correlacionar as escalas. Essa troca de informações entre escalas permite maior capacidade de representar o comportamento do material.

Atualmente é ampla a bibliografia disponível em relação às técnicas de homogeneização. Neste contexto pode-se citar alguns trabalhos que apresentaram contribuições para a homogeneização em métodos multi escala. Em 1999 (MICHEL; MOULINEC; SUQUET, 1999), foi apresentado o estudo para o cálculo do comportamento homogeneizado de materiais compostos que possuem microestrutura periódica. Foram abordados dois métodos numéricos para determinação do comportamento da microestrutura, os métodos foram comparados e discutidos nos requisitos de custo computacional e capacidade de representação do comportamento. Abordagens similares são vistas em (MIEHE, 1999) (KOUZNETSOVA; BREKELMANS; BAAIJENS, 2001) (MIEHE; KOCH, 2002) (GEERS; KOUZNETSOVA; BREKELMANS, 2003) (KOUZNETSOVA, 2002) (MIEHE, 2003) (YANG; BECKER, 2004a) (KOUZNETSOVA; GEERS; BREKELMANS, 2004), podemos destacar o (KOUZNETSOVA, 2002) pelo condicionamento das condições de contorno periódicas na análise multi escala e as condições de contorno de segunda ordem.

Em trabalhos como (BERGER et al., 2010) é utilizada a análise multi escala para prever o comportamento de placas de material composto piezoelétrico com distribuição aleatória de fibras. A célula de análise é constituída de forma aleatória respeitando características como proporção de fibra para matriz.

A aplicação da análise multi escala está se difundindo em várias áreas onde é possível identificar as características da microestrutura, nos trabalhos (PODSHIVALOV; FISCHER; BAR-YOSEPH, 2011b) (PODSHIVALOV; FISCHER;

BAR-YOSEPH, 2011a) é realizado um escaneamento tridimensional em alta definição de ossos humanos, uma vez que identificado toda a microestrutura óssea. A análise por elementos finitos multi escala é realizada com intenção de auxiliar os médicos no diagnóstico, prognóstico do tratamento, medicamentos e monitoramento.

Avançando sobre o modelo multi escala já é possível propor o inverso, conhecendo o comportamento desejado é possível construir o material de forma artificial. Para atender o comportamento desejado é utilizado métodos de otimização para obter as microestruturas. Além da mistura de materiais e formas para criar microestruturas é possível ter materiais que mudam seu comportamento de acordo com a temperatura, por exemplo. Desta forma é possível projetar materiais com características exclusivas, seja um elastômero com propriedades de rigidez e amortecimento diferentes em cada direção do componente. Uma prótese para substituir uma parte de um osso humano mantendo o mesmo comportamento mecânico.

Uma das dificuldades encontradas na modelagem multi escala é como relacionar as escalas ou meios. Existem várias formas de correlacionar as escalas, e cada uma delas tem as suas particularidades. Uma forma é fazer a média do volume dos materiais pertencentes a microestrutura. Para obter o comportamento adequado é necessário aplicar as hipóteses de comportamento na microestrutura, ou seja, as considerações feitas para garantir que um ponto material seja representado pela microestrutura. Essas considerações são chamadas de classe de multi escala, as classes básicas implicam em definir o comportamento da fronteira da microestrutura.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Implementação e obtenção de propriedades viscoelásticas de microestruturas via homogeneização numérica, em microestruturas excitadas por um histórico de deformação de amplitudes e frequências constantes

1.1.2 Objetivos específicos

- Realizar pesquisa exploratória sobre os assuntos que envolvem a teoria de homogeneização, multi escala e viscoelasticidade;

- Implementação computacional do modelo elástico linear;
- Implementação computacional do modelo tridimensional; viscoelástico.

2 MODELAGEM MULTI ESCALA ELÁSTICA LINEAR

Neste capítulo será apresentado a teoria de modelagem multiescala para materiais com uma microestrutura de comportamento elástico linear, baseado no artigo de (De Souza Neto; FEIJÓO, 2006). Inicialmente são definidos os domínios envolvidos nesta modelagem: macroscópico, microscópico, e como eles se relacionam a partir dos campos de deslocamento, deformação e tensão definidos em cada domínio. Posteriormente são comentados aspectos relativos à implementação numérica ((De Souza Neto; FEIJÓO, 2006), (MIEHE; KOCH, 2002), (KOUZNETSOVA, 2002)) e as formas de impor diferentes opções de condição de contorno. O capítulo é finalizado com exemplos numéricos e comparações de resultados.

2.1 MODELAGEM MULTI ESCALA

Considere-se um corpo no espaço \mathcal{R}^3 com um domínio definido Ω , denominado *domínio macroscópico* que possua uma microestrutura definida e muito menor que as dimensões do corpo, representado pela Figura 1. Denomina-se *domínio da microescala*, representado pelo símbolo, Ω_μ , à região que pelo seu tamanho permite a distinção das diferentes geometrias e fases de material existentes na microestrutura.

Considerando, por simplicidade apenas duas fases de material, sólido e vazio, a definição do domínio da microescala é representado pela expressão (2.1).

$$\Omega_\mu = \Omega_\mu^s + \Omega_\mu^v \quad (2.1)$$

Onde Ω_μ^s é o *domínio ocupado pela fase sólida* e Ω_μ^v é o *domínio ocupado pela fase "vazia" da microestrutura*. Defini-se \mathbf{x} é o *vetor posição na macroescala* e por fim \mathbf{y} é o *vetor posição na microescala*. É considerado que o *contorno do domínio da microescala* $\partial\Omega_\mu$ não possui interseção com os vazios do domínio da micro escala, ou seja, não existe a comunicação de um poro com o contorno, representado pela equação (2.2),

$$\partial\Omega_\mu \cap \Omega_\mu^v = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

O domínio da microescala Ω_μ está ocupado pelo denominado *Elemento representativo de volume* representado pela sigla RVE, que é a própria microestrutura do material na microescala. O RVE deve possuir dimensões grandes suficientes para permitir a obtenção de propriedades homogeneizadas deste

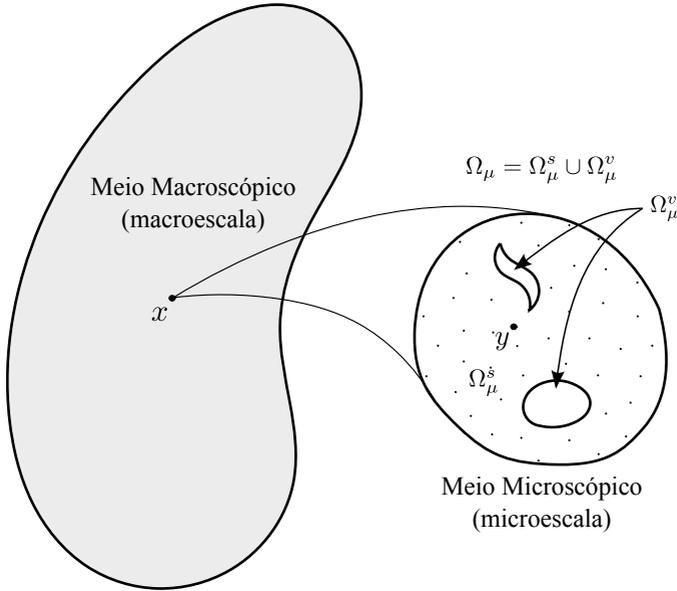


Figura 1: Exemplo de dois domínios utilizados na modelagem multi escala volume na macroescala, mas ao mesmo tempo tem que ser pequeno suficiente para que seja representativo de um ponto material na macroescala. Desta forma pode-se admitir continuidade para as funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento e as propriedades nele contidas são valores médios que podem ser associados ao um ponto material na macroescala.

2.2 CAMPO DE DESLOCAMENTOS NA MICROESCALA

Na modelagem de problemas multi escala é possível obter duas ou mais escalas vinculadas entre si mediante uma perturbação definida no campo de deslocamentos, deformações ou tensões.

Todos os modelos apresentados neste trabalho são guiados por deformação. Então ao definir o campo de deslocamentos na microescala considera-se uma perturbação originada de uma escala superior, que neste caso vai ser da macroescala. O campo de deslocamentos é definido através

de uma decomposição aditiva, apresentada na equação (2.3).

$$\mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) \quad (2.3)$$

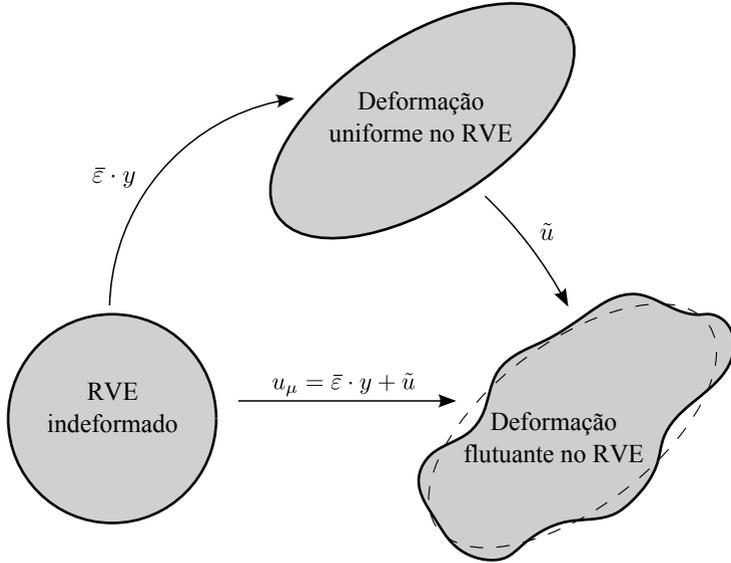


Figura 2: Descomposição aditiva da microescala

O campo de deslocamentos microscópicos dependente da variável \mathbf{y} é representado por \mathbf{u}_μ . $\bar{\mathbf{u}}$ é o deslocamento macroscópico dependente da posição macroscópica \mathbf{x} e a outra parcela da adição é o *deslocamento flutuante*, $\tilde{\mathbf{u}}$ dependente da escala microscópica \mathbf{y} . O deslocamento macroscópico pode ser definido a partir do estado macroscópico de deformação $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ avaliado no ponto material \mathbf{x} da macroescala e uma expansão linear em relação a microescala \mathbf{y} , é definido por,

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \equiv \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{y}(\mathbf{y}, t). \quad (2.4)$$

Assim substituindo a equação (2.4) em (2.3) temos:

$$\mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, t) = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) \quad (2.5)$$

2.3 TENSOR DE DEFORMAÇÃO NA MICROESCALA

A definição do tensor de deformação é o gradiente simétrico do campo de deslocamentos representado pela equação,

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla^s \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Ao substituírmos o campo de deslocamentos da microescala (2.5) na equação (2.6) e realizarmos algumas manipulações matemáticas ficamos com a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_\mu &= \nabla^s \mathbf{u}_\mu \\ &= \nabla^s \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{y} \right) + \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) \\ &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) \\ &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu(\mathbf{y}, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ denominado *tensor deformação flutuante* é o gradiente simétrico do campo de deslocamentos flutuantes $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$.

Quando estamos trabalhando com duas ou mais escalas deseja-se em geral identificar as propriedades homogeneizadas da menor escala. Para determinar o $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$, denominado *tensor deformação homogeneizado* é aplicado uma média volumétrica no domínio microscópico. A média volumétrica é a integral do tensor deformação microscópico no domínio da microescala, dividido pelo volume do domínio. Devido a decomposição aditiva do campo de deslocamentos na microescala, na homogeneização do tensor de deformação temos as mesmas duas parcelas. Uma, decorrente da deformação macroscópica constante em todo domínio da microescala, e a segunda resultante do campo de deslocamentos flutuantes:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{y}, t) &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\mu(\mathbf{y}, t) dV \\ &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}, t) \right) dV \\ &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) dV \\ \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{y}, t) &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) dV \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.4 EQUILÍBRIO NO RVE

O RVE deve satisfazer as condições de equilíbrio em cada instante do histórico de deformação da macroescala. Para isto, o *tensor tensão microscópico* representado por $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ deve estar em equilíbrio com os campos de *forças no contorno e forças de corpo*, representados respectivamente por \mathbf{t}^e e \mathbf{b} . O RVE está em equilíbrio se somente satisfazer a seguinte equação variacional:

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{b}(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{t}^e(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu \quad (2.9)$$

para cada instante de tempo t , onde \mathcal{V}_μ é o espaço dos deslocamentos virtuais no RVE e $\boldsymbol{\eta}$ é *deslocamento virtual*.

Lembramos que o RVE é composto por mais de uma fase, aqui, por simplicidade de apresentação, uma fase sólida e outra vazia. A fase vazia pode ser representado por poros, esses podendo estar vazios ou com um líquido pressurizado. Expandindo a equação (2.9) para as fases sólida e vazia do RVE obtemos a seguinte equação,

$$\int_{\Omega_\mu^s} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_\mu^s} \mathbf{b}(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_\mu^s} \mathbf{t}^e(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dA + \int_{\Omega_\mu^v} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_\mu^v} \mathbf{b}(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dV = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu \quad (2.10)$$

por outro lado, no domínio Ω_μ^v também temos um estado de equilíbrio descrito por,

$$\int_{\Omega_\mu^v} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_\mu^v} \mathbf{b}(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_\mu^v} \mathbf{t}^v(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu \quad (2.11)$$

onde o campo de *forças internas no vazio*, \mathbf{t}^v , é definido como força exercida sobre a parte sólida do domínio do RVE através do *contorno sólido-vazio*, $\partial\Omega_\mu^v$. Ao substituir a equação (2.11) em (2.10) temos uma forma conveniente

da equação para o equilíbrio mecânico na parte sólida,

$$\int_{\Omega_\mu^s} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_\mu^s} \mathbf{b}(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_\mu^s} \mathbf{t}^e(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dA + \\ + \int_{\partial\Omega_\mu^v} \mathbf{t}^v(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu \quad (2.12)$$

Nos casos onde os vazios representam poros livres de esforços internos, a última parcela do primeiro termo da equação (2.12) é nula. Quando existir um fluido pressurizado nos vazios, a força depende da pressão nos poros. Outra fonte importante das forças internas nos vazios ser diferente de zero, pode ser o contato entre os lados opostos em um colapso de um poro com ou o fechamento de fissura. Nestes casos a força interna nos vazios é um funcional dado pela história de deslocamento na interface sólido-vazio.

Se o campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ for suficientemente regular, as equações variacionais do equilíbrio (2.11) e (2.12), respectivamente na parte sólida e vazia do RVE, podem ser escritas equivalentemente na forma diferencial,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{y}, t) & \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu^s \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{y}, t) & \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu^v \\ \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) \mathbf{n} = \mathbf{t}^e(\mathbf{y}, t) & \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) \mathbf{n} \rrbracket = \mathbf{0} & \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu^v \end{array} \right. \quad (2.13)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário para fora e $\llbracket \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) \mathbf{n} \rrbracket$ é o salto do campo vetorial $\boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{n}$ atravessando a interface sólido-vazio, $\partial\Omega_\mu^v$.

No caso particular onde o domínio Ω_μ^v representa uma região sem material, ou seja, estritamente vazio, deve-se ter,

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu^v \quad (2.14)$$

Neste caso, somente as superfícies onde o campo de forças \mathbf{t}^v mais o contorno $\partial\Omega_\mu^v$ precisam ser considerados na possível contribuição do vazio ou poros com o comportamento mecânico do RVE. No texto a seguir o estudo estará restrito a casos que satisfazem a condição (2.14), isto é, forças de corpo nulas na fase vazia da microestrutura.

2.5 TENSÃO HOMOGENEIZADA

Uma hipótese fundamental da teoria da homogeneização, é que de forma análoga a equação (2.8) o *tensor tensão macroscópico homogeneizado* representado por $\boldsymbol{\sigma}_h$, no ponto \mathbf{x} na macroescala é definido como a média do *campo de tensão microscópico*, $\boldsymbol{\sigma}_\mu$, que por sua vez, é definido em cada ponto do RVE. É possível obter a equação para tensão macroscópica homogeneizada,

$$\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) dV \quad (2.15)$$

É possível expandir o tensor tensão microscópico utilizando a decomposição aditiva com uma parcela macroscópica e outra flutuante semelhante ao campos de deformação e deslocamento, assim obtendo,

$$\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}, t) dV \quad (2.16)$$

Uma condição importante para tornar válida a equação (2.15) é que o domínio microscópico deve ser contínuo, de modo que o conceito de tensão permaneça válido na microescala. Assim, o RVE tem que ser grande suficiente para que as premissas de mecânica do contínuo possuam validade na microescala.

2.6 O PRINCÍPIO DE HILL-MANDEL PARA MACRO-HOMOGENEIDADE

O *princípio de Hill-Mandel para macro-homogeneidade* é fundamental para a formulação dos modelos constitutivos multi escala. Baseado em argumentos físicos, é postulado que *a potência produzida pela tensão macroscópica deve ser igual a média volumétrica da potência produzida pelas tensões microscópicas no RVE*. Este princípio é escrito simbolicamente pela equação abaixo,

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\mu dV \quad (2.17)$$

Em um RVE caracterizado pelo campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ em equilíbrio, a equação (2.17), deve ser satisfeita para qualquer taxa do campo de deformação microscópica, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\mu$. Dentro da mesma ideia, a taxa do campo de

deformações microscópico é:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu \equiv \nabla^s \dot{\mathbf{u}}_\mu = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nabla^s \dot{\mathbf{u}}_\mu \quad \dot{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu \quad (2.18)$$

onde o \mathcal{V}_μ é o espaço velocidades flutuantes.

Em (De Souza Neto; FEIJÓO; NETO, 2006) prova-se que o princípio de macro homogeneidade de Hill-Mandel é satisfeito se e somente se o trabalho virtual das forças externas \mathbf{t}^e , e do campo de forças de corpo \mathbf{b} , no RVE são nulas, isto é,

$$\int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{t}^e \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_\mu} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} dV = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (2.19)$$

2.7 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO MECÂNICO

A satisfação do princípio de Hill-Mandell implica que ao substituir este resultado na equação (2.19) em (2.12) se obtém a expressão

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV + \int_{\partial\Omega_\mu^v} \mathbf{t}^v(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Caso as forças no interior dos poros for zero, temos a seguinte equação,

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

Em uma teoria puramente mecânica, é considerado que o tensor tensão em um ponto qualquer do domínio depende do histórico de deformação do ponto. Então, existe um operador que relaciona o histórico de deformações com o tensor tensão, dado por

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathfrak{F}_\mu \left(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right). \quad (2.22)$$

E expandindo o tensor deformação microscópico chega-se à seguinte relação,

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathfrak{F}_\mu \left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}, t) \right). \quad (2.23)$$

Em casos elásticos lineares o operador \mathfrak{F}_μ pode ser definido mediante o tensor \mathbb{C}_μ denominado *tensor de elasticidade de 4ª ordem*,

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbb{C}_\mu : \boldsymbol{\varepsilon}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu \quad (2.24)$$

Substituindo a equação (2.24) em (2.23), tem-se a relação constitutiva na microescala.

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbb{C}_\mu : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{C}_\mu : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) \quad (2.25)$$

Substituindo a equação (2.25) em (2.21) se obtém (2.26):

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV = - \int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV \quad (2.26)$$

Como pode-se ver na equação (2.26) o campo de deslocamentos flutuantes é a resposta mecânica para que o RVE entre em equilíbrio com um termo de carga produzido pela deformação macroscópica. Cabe destacar ainda que, devido a presente análise ter sido restrita a microestruturas de comportamento linear, a equação de equilíbrio (2.26) define uma relação linear entre o campo de deslocamento microscópico $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ e a deformação macroscópica $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

2.8 CLASSES DE MODELOS MULTI ESCALA

Até o presente momento, os espaços que definem os deslocamentos e flutuações cinematicamente admissíveis incorporam restrições mínimas para estabelecer a relação entre micro e macro escala. Porém, para tornar o problema na micro escala bem posto (passível de ser resolvido e obter solução única para o deslocamento flutuante $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$) é preciso adicionar novas restrições. Cada tipo de restrição adicional sobre o campo de deslocamentos define uma classe de homogeneização. Podem-se listar 4 tipos:

- Modelo de Taylor ou deslocamentos uniforme no RVE;
- Deslocamentos lineares no contorno do RVE;
- Deslocamentos periódicos e trações anti-periódicas no contorno do RVE;
- Trações constantes no contorno do RVE.

2.8.1 Modelo de Taylor ou deslocamentos uniformes no RVE

O modelo proposto por Taylor define que os deslocamentos no domínio do RVE são dados somente pela parte macroscópica da decomposição aditiva do campo de deslocamentos, ou seja, não existe deslocamentos flutuantes em todo domínio da micro escala. Incorporando na equação (2.3), a condição que o campo de deslocamento flutuante é nulo em todo o domínio, isto é,

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu, \quad (2.27)$$

obtém-se que o campo de deslocamentos na microescala é,

$$\mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu, \quad (2.28)$$

e consequentemente, o campo de deformações na microescala é constante e coincidente com o valor de deformação macroscópico:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mu(\mathbf{y}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.29)$$

Substituído este resultado na expressão das tensões

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathfrak{F}_\mu(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)) \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu, \quad (2.30)$$

consequentemente o tensor de tensão homogeneizado fica,

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathfrak{F}_\mu(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu dV : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.31)$$

Identifica-se que a equação (2.31) é uma média volumétrica do tensor de comportamento de cada fase do RVE. Considerando por exemplo que o domínio do RVE tenham fases,

$$\Omega_\mu = \Omega_\mu^1 \cup \Omega_\mu^2 \cup \Omega_\mu^3 \dots \Omega_\mu^m \quad (2.32)$$

Em cada fase o correspondente tensor de elasticidade é constante de modo que a integral (2.31) se reduz ao somatório do volume de cada fase multiplicando pelo tensor constitutivo da mesma, dividido pelo volume total do RVE:

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu = \sum_{n=1}^m \left(\frac{V^n}{V_\mu} \mathbb{C}^n \right) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.33)$$

Onde V^n é o volume da fase n no RVE e \mathbb{C}^n é o tensor constitutivo na fase n do RVE. É possível identificar mais uma propriedade de cada fase, que nada mais é que a *razão entre o volume da fase e o volume da microescala*, representado por γ^n ,

$$\gamma^n = \frac{V^n}{V_\mu} \quad (2.34)$$

ao substituirmos a equação (2.34) em (2.33) se obtém,

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \underbrace{\sum_{n=1}^m (\gamma^n \mathbb{C}^n)}_{\mathbb{C}^T} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.35)$$

onde, \mathbb{C}^T é o *tensor de elasticidade de Taylor* ou *tensor de elasticidade linear*, definido pela expressão,

$$\mathbb{C}^T = \sum_{n=1}^m (\gamma^n \mathbb{C}^n). \quad (2.36)$$

Neste caso particular defini-se o *tensor tensão homogeneizado linear* representado por $\boldsymbol{\sigma}^T$, representado na seguinte equação,

$$\boldsymbol{\sigma}^T \equiv \mathbb{C}^T : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.37)$$

2.8.2 Modelo de deslocamentos lineares no contorno do RVE

Esta classe define que os deslocamentos no contorno do RVE são lineares, ou equivalentemente, as flutuações na fronteira do RVE são nulas:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu. \quad (2.38)$$

Desta forma, no contorno no RVE o deslocamento está dado apenas pela parcela linear definida pela deformação macroscópica

$$\mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}, t) \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu. \quad (2.39)$$

Na Figura 3 é demonstrado a composição do campo de deslocamentos do RVE quando é aplicado a classe de deslocamentos lineares no contorno.

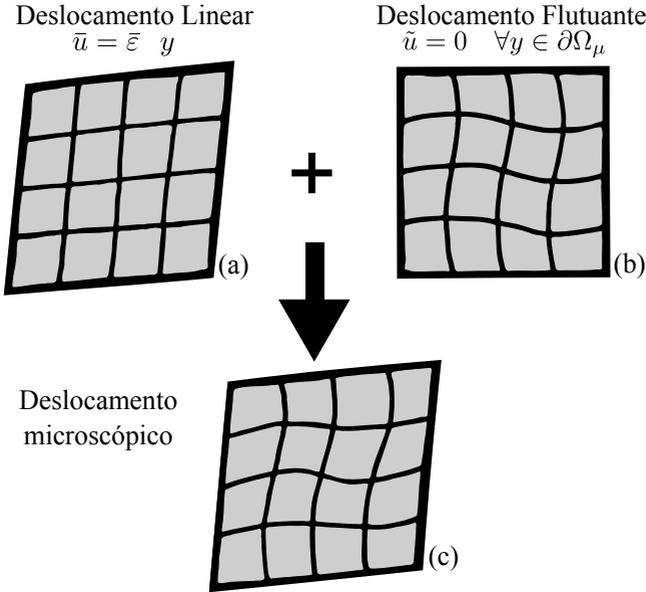


Figura 3: Composição do campo de deslocamentos para o modelo de deslocamentos lineares no contorno.

2.8.3 Deslocamentos periódicos no contorno do RVE

Este modelo postula que o conjunto de deslocamentos admissíveis é composto por aqueles que possuem periodicidade na fronteira do RVE. Para facilitar o entendimento desta condição considere um RVE retangular como o ilustrado na Figura 3(b). O contorno está formado por quatro segmentos suaves sendo que cada segmento possui um segmento oposto, $\partial\Omega^+$ e $\partial\Omega^-$ denominados respectivamente *contorno positivo do RVE* e *contorno negativo do RVE*. A união dos dois conjuntos fornece o contorno do RVE.

$$\partial\Omega_\mu = \partial\Omega_\mu^+ \cup \partial\Omega_\mu^- \quad (2.40)$$

Para cada ponto \mathbf{y}^+ no contorno positivo existe o ponto correspondente \mathbf{y}^- no contorno negativo. Esses dois pontos formam um *par*, $\{\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-\}$, que devem satisfazer a seguinte restrição no deslocamento:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}^-, t) = \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}^+, t) \quad \forall \text{par} \{\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-\} \in \partial\Omega_\mu. \quad (2.41)$$

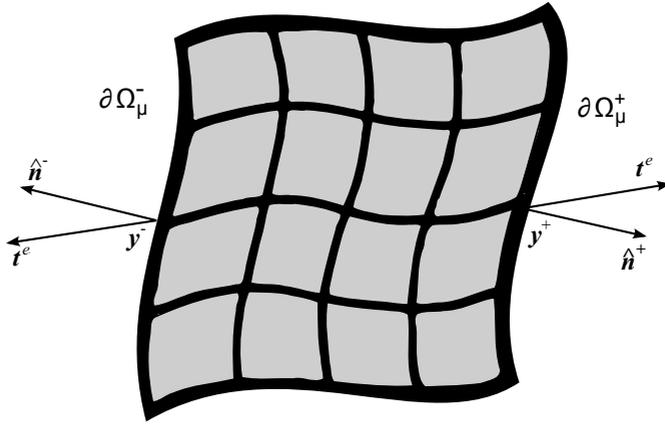


Figura 4: Entidades envolvidas no classe de modelo de deslocamentos flutuantes periódicos no contorno

Da mesma forma, o vetor normal para fora, $\hat{\mathbf{n}}$, em um ponto do contorno positivo tem o sentido oposto no seu correspondente ponto no contorno negativo

$$\hat{\mathbf{n}} \in \partial\Omega_\mu^- = -\hat{\mathbf{n}} \in \partial\Omega_\mu^+ \quad (2.42)$$

Utilizando a mesma anotação que foram usadas para os deslocamentos,

$$\hat{\mathbf{n}}^-(\mathbf{y}^-, t) = -\hat{\mathbf{n}}^+(\mathbf{y}^+, t). \quad (2.43)$$

É possível provar que estas condições de periodicidade nos deslocamentos trazem como consequência a seguinte propriedade de anti-periodicidade nas forças de superfície atuando no contorno do RVE (De Souza Neto; FEIJÓO; NETO, 2006):

$$\mathbf{t}^e(\mathbf{y}^+, t) = -\mathbf{t}^e(\mathbf{y}^-, t) \quad \forall \text{par} \{\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-\} \in \partial\Omega_\mu \quad (2.44)$$

Para melhor compreensão, é possível visualizar as entidades na Figura 4

2.8.4 Modelo de forças externas constantes no contorno do RVE

Essa classe de condições de contorno é baseada na mínima restrição do deslocamento do contorno do RVE, sendo também a única guiada pelo estado

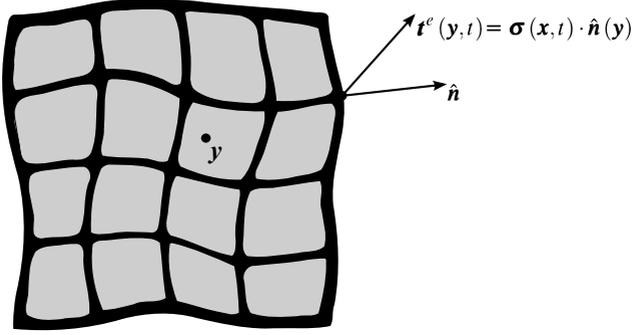


Figura 5: Forças externas constantes no contorno

de tensões na macroescala. A condição estabelece que as forças de superfície no contorno da microestrutura sejam iguais ao produto do tensor de tensões homogeneizado no ponto \mathbf{x} pela normal correspondente à superfície do RVE:

$$\mathbf{t}^e(\mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu \quad (2.45)$$

Esta condição está ilustrada na Figura 5

2.9 TENSOR DE ELASTICIDADE HOMOGENEIZADO

Considerando a equação (1.15) que define o tensor tensão homogeneizado

$$\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) dV \quad (2.46)$$

e substituindo o $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ pelo modelo de elasticidade linear

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbb{C}_\mu : \boldsymbol{\epsilon}_\mu = \mathbb{C}_\mu : (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}), \quad (2.47)$$

obtem a expressão,

$$\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu dV : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} dV \quad (2.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}_h^T + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h \quad (2.49)$$

É fácil notar que no modelo de elasticidade linear a tensão homogeneizada depende linearmente do tensor $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, pois em (2.48) o deslocamento flutuante $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ também depende linearmente de $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ através de (2.26). Considerando que $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$, definem-se, por conveniência, os deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}_{ij}$, solução dos problemas variacionais lineares

$$\int_{\Omega_\mu} \nabla^s \boldsymbol{\eta} : \mathbb{C}_\mu : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij} dV = \int_{\Omega_\mu} \nabla^s \boldsymbol{\eta} : \mathbb{C}_\mu dV : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \varepsilon_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (2.50)$$

Obtidos estes deslocamentos, é possível reconstruir $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ e $\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu$ como segue:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu = \varepsilon_{ij} \tilde{\mathbf{u}}_{ij} \quad \text{e} \quad \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu = \varepsilon_{ij} \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij}. \quad (2.51)$$

Por outro lado, o tensor de 2ª ordem $\mathbb{C}_\mu : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij}$ pode ser escrito em componentes da base cartesiana como

$$\mathbb{C}_\mu : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij} = \mathbb{C}_{\mu klpq} (\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij})_{pq} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l). \quad (2.52)$$

Desta forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij} dV \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} [\mathbb{C}_\mu]_{klpq} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij}]_{pq} dV (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)] \\ &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} [\mathbb{C}_\mu]_{klpq} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij}]_{pq} dV (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{rs} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)] \\ &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} [\mathbb{C}_\mu]_{klpq} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij}]_{pq} dV (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{rs} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s)] \\ &= \tilde{\mathbb{C}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde

$$\tilde{\mathbb{C}} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} [\mathbb{C}_\mu]_{klpq} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij}]_{pq} dV (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (2.54)$$

Substituindo este resultado em (2.48) e (2.49) se tem que

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbb{C}^T : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\mathbb{C}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C}_h : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.55)$$

O tensor \mathbb{C}_h é o *tensor de elasticidade homogeneizado*. Deve-se notar que esta expressão é independente do modelo utilizado de restrição no contorno. Cada modelo, entretanto, resultará em valores diferentes de \mathbb{C}_h dado que os campos $\tilde{\mathbf{u}}_{ij}$ utilizados em (2.54) são consequência desta restrição.

$$\mathbb{C}_h = \mathbb{C}^T + \tilde{\mathbb{C}} \quad (2.56)$$

2.10 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Esta seção do trabalho é dedicada à implementação computacional via o método convencional de elementos finitos. Primeiramente serão mostradas as estruturas básicas da discretização e aquelas associadas à modelagem multi escala. Em uma segunda parte é apresentado como operar com as condições de contorno, sendo detalhados aspectos operacionais dos modelos de restrição de contorno linear e periódico.

2.10.1 Discretização em elementos finitos

A equação (2.26) fornece um problema variacional a ser resolvido para cada termo da base canônica, fornecendo o campo $\tilde{\mathbf{u}}_{ab}$,

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ab} : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV = - \int_{\Omega_\mu} \mathbb{C}_\mu : (\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (2.57)$$

Utilizando a técnica convencional de Elementos Finitos, o problema contínuo acima se reduz ao problema discreto equivalente

$$\mathbf{K}_\mu \tilde{\mathbf{U}}^{ab} = \mathbf{F}^{ab} \quad (2.58)$$

onde,

$$\mathbf{K}_\mu = \bigcup_e \mathbf{K}_\mu^e = \bigcup_e \int_{\Omega_\mu^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}_\mu^e \mathbf{B}^e d\Omega_\mu^e \quad (2.59)$$

$$\mathbf{F}^{ab} = \bigcup_e \mathbf{F}_e^{ab} = \bigcup_e \int_{\Omega_\mu^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}_\mu^e \mathbf{E}^{ab} d\Omega_\mu^e \quad (2.60)$$

onde \mathbf{B}^e é a *matriz de derivadas das funções de forma do elemento finito*, \mathbf{C}_μ^e é a *matriz de elasticidade* correspondente ao material presente na posição do

elemento, $\tilde{\mathbf{U}}^{ab}$ é o vetor de deslocamentos flutuantes do elemento, o \mathbf{F}^{ab} é o vetor de força interna gerado pela deformação canônica e \mathbf{E}^{ab} é a matriz que contém os componentes da base canônica. No presente trabalho foram resolvidos problemas bidimensionais de estado plano de tensão e tridimensionais, utilizando portanto matrizes \mathbf{E}^{ab} de 3×1 e 6×1 respectivamente.

2.10.2 Deslocamentos lineares no contorno

Para impor condições de deslocamento linear no contorno, primeiramente é feita uma classificação entre os graus de liberdade que estão no contorno dos internos, é conveniente classificar os graus de liberdade e dividir a matriz de deslocamentos em duas partes contendo os graus de liberdade da fronteira e do interior, representados respectivamente por \mathbf{U}_p e \mathbf{U}_f .

A partição desse vetor de deslocamento é realizado com auxílio de matrizes de projeção, \mathbb{P} . São matrizes contendo zeros e uns, que realizam a seguinte operação:

$$\mathbf{U}_p = \mathbb{P}_p \tilde{\mathbf{U}}^{ab}, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{U}_f = \mathbb{P}_f \tilde{\mathbf{U}}^{ab}, \quad (2.62)$$

onde \mathbb{P}_p é a matriz de projeção dos graus de liberdade no contorno e \mathbb{P}_f matriz de projeção dos graus liberdade internos. A mesma construção é utilizada para o vetor força externa,

$$\mathbf{F}_p = \mathbb{P}_p \mathbf{F}^{ab} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{F}_f = \mathbb{P}_f \mathbf{F}^{ab} \quad (2.64)$$

Onde \mathbf{F}_p é o vetor força para os graus de liberdade no contorno, \mathbf{F}_f é o vetor de forças para os graus de liberdade internos. A matriz de rigidez global é particionada em 4 outras matrizes, onde cada termo da matriz é determinado com as seguintes operações,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{pp} &= \mathbb{P}_p \mathbf{K}_\mu \mathbb{P}_p^T \\ \mathbf{K}_{pf} &= \mathbb{P}_p \mathbf{K}_\mu \mathbb{P}_f^T \\ \mathbf{K}_{fp} &= \mathbb{P}_f \mathbf{K}_\mu \mathbb{P}_p^T \\ \mathbf{K}_{ff} &= \mathbb{P}_f \mathbf{K}_\mu \mathbb{P}_f^T \end{aligned} \quad (2.65)$$

O sistema linear particionado a ser resolvido é,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pf} \\ \mathbf{K}_{fp} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{U}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_f \end{Bmatrix}. \quad (2.66)$$

Na classe de condição de contorno de deslocamento linear no contorno o deslocamento flutuante no contorno é zero, tornando o vetor \mathbf{U}_p nulo. Assim, o sistema linear se reduz a

$$\mathbf{K}_{ff} \mathbf{U}_f = \mathbf{F}_f. \quad (2.67)$$

Resolvido o sistema, o vetor completo de graus de liberdade se obtém mediante a operação

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbb{P}_f^T \mathbf{U}_f. \quad (2.68)$$

2.10.3 Deslocamentos Periódicos no contorno do RVE

Como já apresentado, neste modelo os valores do campo de deslocamento sobre fronteiras opostas no RVE adotam valores idênticos, isto é,

$$\tilde{\mathbf{u}} \in \partial\Omega_\mu^- \equiv \tilde{\mathbf{u}} \in \partial\Omega_\mu^+, \quad (2.69)$$

ou, por simplicidade de notação,

$$\tilde{\mathbf{u}}^- = \tilde{\mathbf{u}}^+, \quad (2.70)$$

sendo $\tilde{\mathbf{u}}^-$ o deslocamento sobre a fronteira negativa e $\tilde{\mathbf{u}}^+$ o deslocamento sobre a fronteira positiva. Já na versão discreta de elementos finitos, denotamos $\tilde{\mathbf{U}}^+$ ao vetor de graus de liberdade pertencentes ao contorno positivo e $\tilde{\mathbf{U}}^-$ aqueles pertencentes ao contorno negativo, permitindo a notação

$$\tilde{\mathbf{U}}^- = \tilde{\mathbf{U}}^+. \quad (2.71)$$

Adota-se que os deslocamentos do contorno negativo são dependentes do deslocamento do contorno positivo. Por conseguinte é criado mais um grupo de deslocamentos, os dependentes e os independentes. Os independentes são o grupo de deslocamentos do contorno positivo mais os deslocamentos dos nós que não estão no contorno representado subscrito por $(\cdot)_\Omega$.

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}_\Omega \quad (2.72)$$

onde \mathbf{U}_i é o *vetor dos nós independentes*. O grupo dos deslocamentos dependentes é o mesmo grupo do deslocamento no contorno negativo, sendo

$$\mathbf{U}_d = \mathbf{U}^-, \quad (2.73)$$

onde \mathbf{U}_d é o *vetor dos deslocamentos dos nós dependentes*. Para obter os vetores de deslocamentos dependentes e independentes, também serão usadas as matrizes de projeção, resultando em

$$\mathbf{U}_i = \mathbb{P}_i \tilde{\mathbf{U}}, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{U}_d = \mathbb{P}_d \tilde{\mathbf{U}}, \quad (2.75)$$

onde \mathbb{P}_i é a *matriz de projeção dos nós independentes* e \mathbf{U}_d é a *matriz dos graus de liberdade dependentes*. Defini-se que a matriz de projeção que relaciona o vetor de deslocamentos independentes, \mathbf{U}_i , com o vetor de deslocamentos dependentes, \mathbf{U}_d , com o seguinte operador,

$$\mathbf{U}_d = \mathbb{C}_{di} \mathbf{U}_i, \quad (2.76)$$

sendo \mathbb{C}_{di} a *matriz que relaciona os deslocamentos dos nós independentes com os dependentes*. A matriz de rigidez também é particionada em função do grau de liberdade independentes e dependentes, usando as matrizes de projeção como na classe de condição de contorno de deslocamento lineares no contorno, obtendo a seguinte morfologia da matriz de rigidez,

$$\mathbf{K}_\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{id} \\ \mathbf{K}_{di} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Logo temos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{id} \\ \mathbf{K}_{di} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_d \end{Bmatrix}. \quad (2.78)$$

Uma forma de resolver esse sistema linear é passar toda a contribuição dos nós dependentes para os independentes, ou seja, reduzir o sistema linear somente para os graus de liberdade independentes. Utilizando a equação (2.76) e as duas equações da equação (2.78) ficamos com a seguinte expressão,

$$[\mathbf{K}_{ii} + \mathbf{K}_{id} \mathbb{C}_{di} + \mathbb{C}_{di}^T \mathbf{K}_{di} + \mathbb{C}_{di}^T \mathbf{K}_{dd} \mathbb{C}_{di}] \mathbf{U}_i = \mathbf{F}_i + \mathbb{C}_{di}^T \mathbf{F}_d. \quad (2.79)$$

Trocando as variáveis

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{ii} + \mathbf{K}_{id}\mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T\mathbf{K}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T\mathbf{K}_{dd}\mathbf{C}_{di}, \quad (2.80)$$

onde \mathbf{K}^* é a *matriz de rigidez condensada pra os graus de liberdade independentes*. O segundo termo da equação (2.79), resulta em

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_i + \mathbf{C}_{di}^T\mathbf{F}_d, \quad (2.81)$$

sendo \mathbf{F}^* o *vetor de força dos graus de liberdade independentes com as contribuições dos graus de liberdade dependentes*. Substituindo as equações (2.80) e (2.81) em (2.79) ficamos com um sistema linear somente com os graus de liberdade independente,

$$\mathbf{K}^*\mathbf{U}_i = \mathbf{F}^* \quad (2.82)$$

Contudo, pode-se dividir os graus de liberdade em livres e prescritos. Os passos seguintes são os mesmo que foram realizados na condição de contorno linear.

$$\mathbf{U}_p = \mathbb{P}_p\mathbf{U}_i, \quad (2.83)$$

$$\mathbf{U}_f = \mathbb{P}_f\mathbf{U}_i, \quad (2.84)$$

o particionamento da matriz de rigidez fica,

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pf} \\ \mathbf{K}_{fp} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

E o vetor de forças,

$$\mathbf{F}_p = \mathbb{P}_p\mathbf{F}^*, \quad (2.86)$$

$$\mathbf{F}_f = \mathbb{P}_f\mathbf{F}^*, \quad (2.87)$$

montando novamente o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pf} \\ \mathbf{K}_{fp} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{U}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_f \end{Bmatrix}. \quad (2.88)$$

Os graus de liberdade prescritos tem valor igual a $\mathbf{0}$, com essa condição resolve-se o mesmo sistema de equações lineares

$$\mathbf{K}_{ff}\mathbf{U}_f = \mathbf{F}_f. \quad (2.89)$$

Para a montagem do vetor de deslocamentos flutuantes tem-se uma série de operações. O vetor de deslocamentos flutuantes é a soma dos vetores de deslocamentos independentes com os dependentes, demonstrado pela expressão

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbb{P}_i^T \mathbf{U}_i + \mathbb{P}_d^T \mathbf{U}_d. \quad (2.90)$$

Obtém-se o vetor de deslocamentos dependentes em função dos independentes, substituindo a equação (2.76) em (2.90) obtemos,

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbb{P}_i^T \mathbb{P}_f^T \mathbf{U}_f + \mathbb{P}_d^T \mathbb{C}_{di} \mathbb{P}_f^T \mathbf{U}_f, \quad (2.91)$$

colocando o vetor de deslocamentos em evidência temos,

$$\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbb{P}_i^T \mathbb{P}_f^T + \mathbb{P}_d^T \mathbb{C}_{di} \mathbb{P}_f^T] \mathbf{U}_f, \quad (2.92)$$

Definindo um novo operador projeção,

$$\tilde{\mathbb{P}}_f = \mathbb{P}_i^T \mathbb{P}_f^T + \mathbb{P}_d^T \mathbb{C}_{di} \mathbb{P}_f^T, \quad (2.93)$$

sendo $\tilde{\mathbb{P}}_f$ a matriz que projeta os graus de liberdade independentes em graus de liberdade flutuantes, ou seja, monta o vetor de deslocamentos flutuantes, como vemos na equação abaixo

$$\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbb{P}}_f \mathbf{U}_f. \quad (2.94)$$

2.10.4 Homogeneização do tensor de elasticidade

Tomando como referência a equação (2.56),

$$\mathbb{C}_h = \mathbb{C}^T + \tilde{\mathbb{C}},$$

é discretizado o primeiro termo, isto é tensor de elasticidade linear homogeneizado ou tensor de Taylor, dado por

$$\mathbb{C}^T = \frac{1}{V_\mu} \sum_{n=1}^m V^n \mathbb{C}^n. \quad (2.95)$$

Colocando na forma equivalente discreta em elementos finitos,

$$\mathbf{C}^T = \bigcup_e \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^e} \mathbf{C}_\mu^e d\Omega_\mu^e \quad (2.96)$$

onde o \mathbf{C}^T é a *Matriz de elasticidade linear homogeneizada*. Considerando a equação (2.54)

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} [\mathbf{C}_\mu] [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij}] dV (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (2.97)$$

na forma tensorial, discretizando essa expressão resulta em duas expressões, a primeira é

$$\tilde{\mathbf{C}}^{ab} = \bigcup_e \frac{1}{V_\mu} \int_\mu \mathbf{C}_\mu^e \mathbf{B}^e \tilde{\mathbf{U}}^{ab} d\Omega_\mu^e, \quad (2.98)$$

onde, $\tilde{\mathbf{C}}^{ab}$ é a *matriz de tensão flutuante* que depende de $\tilde{\mathbf{U}}^{ab}$, sendo este dependente da matriz de deformação canônica \mathbf{E}^{ab} . A obtenção da *matriz de elasticidade flutuante* representado por $\tilde{\mathbf{C}}$, é resultante da união dos tensores tensão flutuantes originando a matriz, demonstrado pela segunda expressão

$$\tilde{\mathbf{C}} = \bigcup_{ab} \tilde{\mathbf{C}}^{ab}. \quad (2.99)$$

Demonstradas as formas discretizadas das parcelas da equação (2.56) em abordagem de elementos finitos, escreve-se a equação da seguinte forma discretizada,

$$\mathbf{C}_h = \mathbf{C}^T + \tilde{\mathbf{C}}. \quad (2.100)$$

2.10.5 Aspectos computacionais

Os algoritmos que foram apresentados são o resultado da implementação de alguns métodos. No método proposto por (MIEHE; KOCH, 2002) é de fácil implementação por usar matrizes de projeção ao montar a matriz de rigidez e os vetores de deslocamento, esse método prejudica no desempenho de processamento por realizar várias operações com as matrizes elevando o custo computacional. A matriz de rigidez global é calculada de forma convencional, após isso é modificada e particionada por uma sequência de operações com as matrizes de projeção.

Uma contribuição importante proposta por (KOUZNETSOVA, 2002) foi como implementar as condições de contorno periódicas, usando somente os graus de liberdade independentes com as contribuições dos graus de liberdade dependentes.

As rotinas de homogeneização das propriedades foram baseadas no que (De Souza Neto; FEIJÓO; NETO, 2006) propôs, foram de fácil implementação e com custo computacional menor.

Algumas dificuldades foram encontradas, como na geração de malha com fins de facilitar a implementação das condições de contorno. A implementação da classe de condições de contorno de deslocamentos lineares no contorno não apresenta nenhum problema. A classe de deslocamentos periódicos apresentam algumas dificuldades, como a aplicação das forças e as restrições de deslocamentos em cada um dos contornos. Uma dificuldade desta classe ocorre quando não existe correspondência de posição entre nós em contornos opostos. A solução no presente caso foi utilizar malhas estruturadas nos contornos dos RVEs. Para análises bidimensionais foram utilizados elementos quadrilaterais bilineares e para as malhas tridimensionais, o elemento hexaédrico de 8 nós, garantindo a formação dos pares de nós correspondentes nas fronteiras opostas.

2.11 EXEMPLO NUMÉRICO

Neste primeiro exemplo numérico foram reproduzidos as análises do artigo (YANG; BECKER, 2004a), onde o autor realizou identificação de propriedades homogeneizadas de microestruturas alterando o tamanho das inclusões e avaliando a evolução das propriedades homogeneizadas.

2.11.1 Microestruturas

As microestruturas que foram analisadas estão ilustradas na Figura 6 onde são realizadas as análises de identificação de propriedades homogeneizadas alterando a proporção entre a parte sólida e vazia das microestruturas. A proporção entre sólido vazio foi alterado de 10% em 10% de vazio, iniciando com *zero* até 60%.

No caso da microestrutura (A), o RVE tem um formato quadrado com uma inclusão circular centrado no meio. O caso (B) tem formato retangular com proporção da base em relação a altura de 3 para 2, a inclusão tem formato

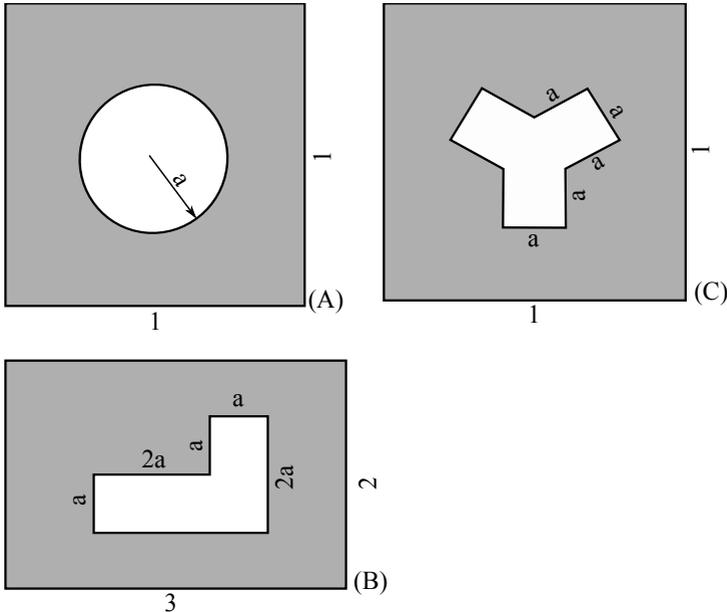


Figura 6: Microestruturas analisadas: (A) Quadrada com inclusão circular central; (B) Retangular com inclusão em forma de 'L'; e (C) Quadrado com inclusão em 'Y'.

de 'L' com as proporções descritas na Figura 6. No caso (C) a microestrutura tem formato quadrado e a inclusão tem formato de 'Y' centrado com as dimensões ilustradas na Figura 6.

2.11.2 Propriedade do material

É proposto a utilização de um material ortotrópico com as propriedades descritas na Tabela (1).

Tabela 1

Constantes do material da placa ortotrópica

$D_{11}(GPa)$	$D_{22}(GPa)$	$D_{12}(GPa)$	$D_{66}(GPa)$	$D_{16} = D_{26}$
109,3	23,6	32,46	36,73	0

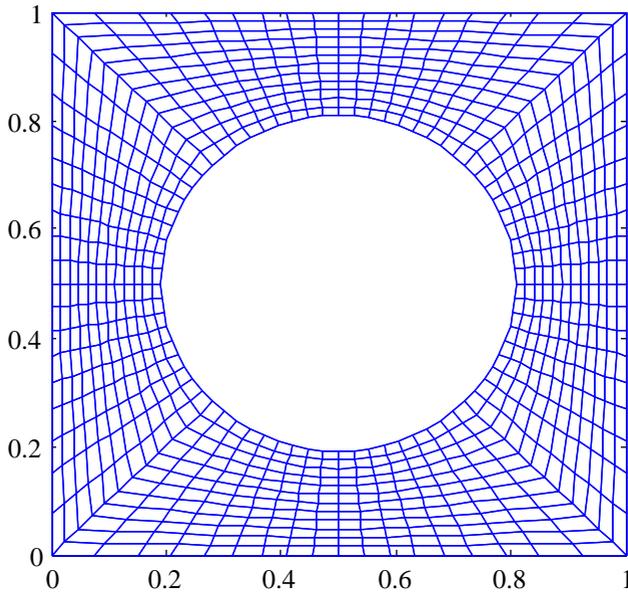


Figura 7: Malha da microestrutura com um furo circular com 30% da área.

2.11.3 Resultados das análises

As análises foram feitas utilizando o convencional método de elementos finitos, utilizando um elemento bilinear de quatro nós.

2.11.3.1 Caso (A)

Para esta primeira análise foram geradas seis malhas alterando a proporção entre vazio e sólido. As malhas obedecem o padrão apresentado na Figura (7), onde temos o furo centralizado no meio da malha, assim é constatado a simetria em dois eixo ortogonais passando pelo centro do furo. Foi utilizada condições de contorno periódicas no contorno do RVE. Para aplicar essa condição de contorno foi gerada a malha de elementos finitos com os nós dos elementos no contorno prevendo a posição adequada para definir os pares de nós.

Analizando os gráficos da Figura 8 temos a esquerda o gráfico de re-

ferência retirado do artigo (YANG; BECKER, 2004a) e a direita o gráfico com os valores encontrados com as simulações feitas através da metodologia proposta. É possível apurar que existem diferenças entre algumas curvas, que no caso são as dos coeficientes D_{16} e D_{26} , que na metodologia proposta temos esses resultados iguais a zero. É esperado que esses resultados sejam *zero*, sendo que temos um RVE quadrado e com um inclusão circular localizada exatamente no centro da microestrutura, com o aumento da inclusão não teria motivos para haver o acoplamento entre distorções no plano com tensões normais.

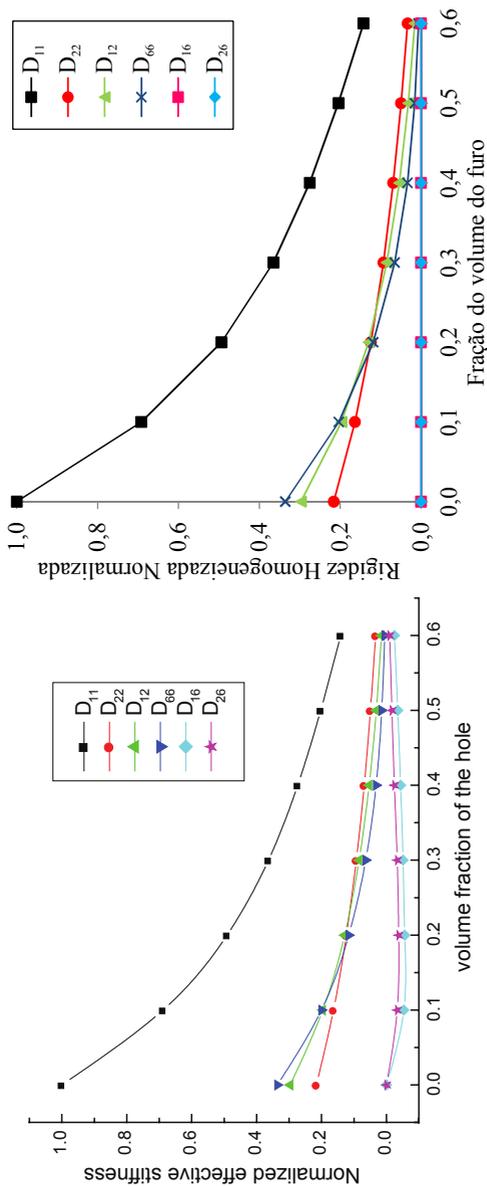


Figura 8: Gráficos que relacionam os coeficientes da matriz de rigidez com a fração de área de do furo circular. A esquerda o gráfico de referência retirado do artigo de (YANG; BECKER, 2004a), a direita gráfico originado dos resultados obtidos com o método proposto.

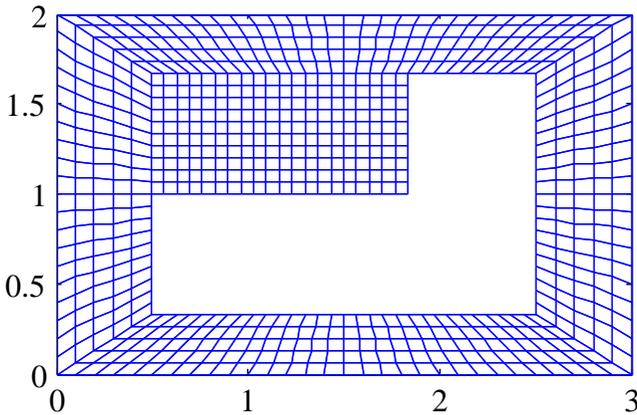


Figura 9: Malha da microestrutura com inclusão em forma de 'L' com 30% da área.

2.11.3.2 Caso (B)

No Caso (B) temos uma microestrutura de formato retangular (Figura 9) com proporções de 2×3 com uma inclusão em forma de 'L' no centro do RVE. Novamente foi utilizada as condições de contorno periódicas. Um detalhe dessa malha é que tem números diferentes de nós nas arestas horizontais em relação as verticais.

Analisando os gráficos da Figura 10 a esquerda o gráfico de referência retirado do artigo (YANG; BECKER, 2004a) e a direita o gráfico com os valores encontrados com as simulações feitas através da metodologia proposta. Nesta análise é possível identificar uma grande semelhança dos resultados obtidos.

Um ponto importante a ser comentado são os valores dos coeficientes D^{16} e D^{26} são diferentes de *zero* até a razão de 50% de vazio, isso demonstra que para um RVE com inclusão no formato 'L' ocorre o acoplamento entre distorções no plano com as tensões normais.

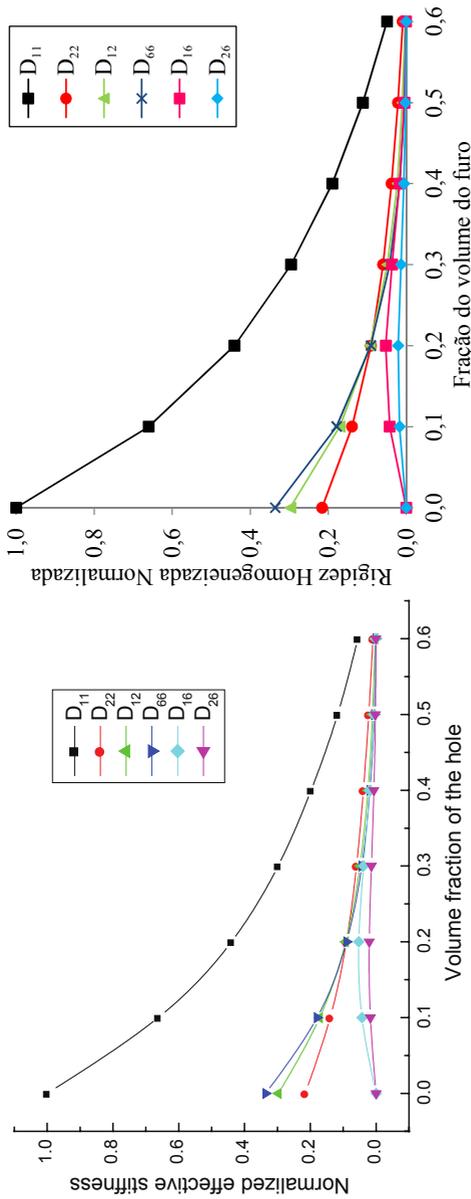


Figura 10: Gráficos que relacionam os coeficientes da matriz de rigidez com a fração de área de do furo em forma de 'L'. A esquerda o gráfico de referência retirado do artigo de (YANG; BECKER, 2004a), a direita gráfico originado dos resultados obtidos com a técnica implementada.

2.11.3.3 Caso (C)

No Caso (C) tem uma microestrutura de formato quadrado (Figura 11) com uma inclusão em forma de 'Y' no centro do RVE. Novamente foram utilizadas as condições de contorno periódicas. Um detalhe dessa malha é a distribuição de nós não uniforme nas arestas, mas sempre obedecendo a condição de que os nós pares estão posicionados de forma simétrica na aresta oposta.

O artigo não demonstra o gráfico relacionando os coeficientes com a variação da razão do vazio para o Caso (C), somente fornece uma tabela com os valores iniciais dos coeficientes e para uma razão de 40%. Comparando os resultado das análises com o artigo, é possível observar o mesmo comportamento, que o RVE com inclusão na forma de 'Y' não gera acoplamento entre distorções no plano e tensões normais. na Figura 12 foi plotado o gráfico com os resultados obtidos.

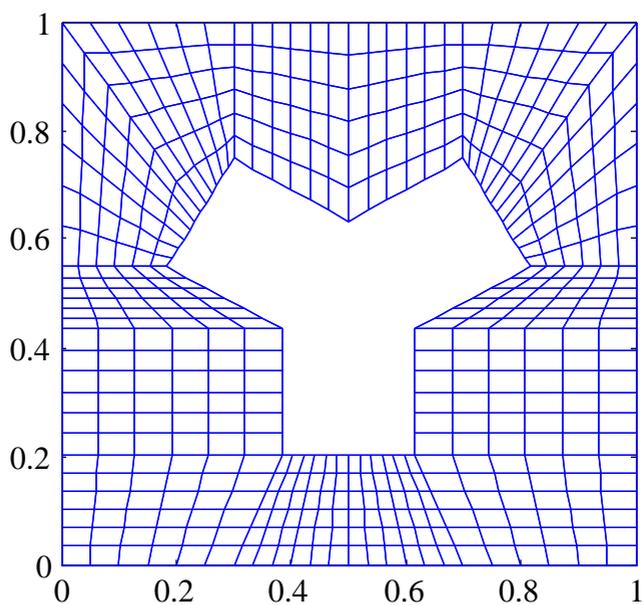


Figura 11: Malha da microestrutura com inclusão em forma de 'Y' com 30% da área.

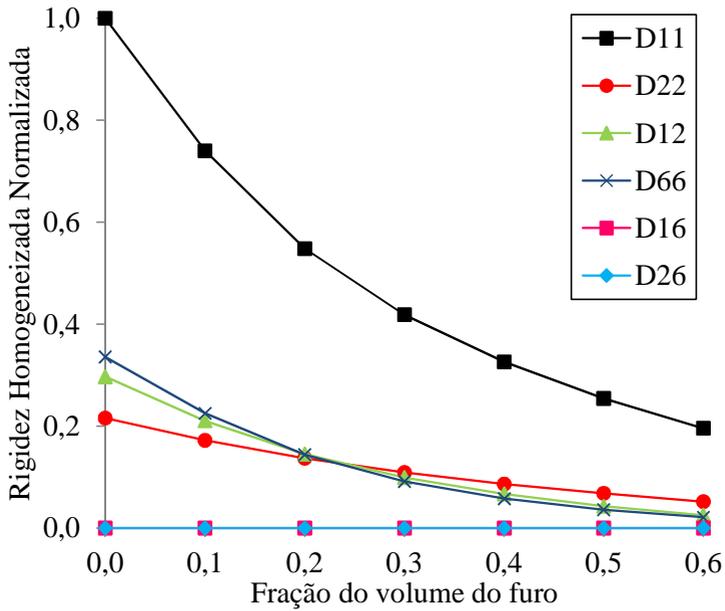


Figura 12: Gráfico que relaciona os coeficientes da matriz de rigidez com a fração de área de do furo em forma de 'Y'. Gráfico originado dos resultados obtidos com a técnica implementada.

3 MODELAGEM MULTI ESCALA VISCOELÁSTICA

Neste capítulo é mostrada a formulação da modelagem multi escala para materiais viscoelásticos que estão submetidos a uma solicitação harmônica. A teoria de viscoelásticidade apresentada é baseada do livro de (CHRISTENSEN, 2003). Primeiramente são vistos os modelos de materiais reológicos unidimensionais, e posteriormente sua expansão para modelos tridimensionais. Logo após é implementado o modelo viscoelástico nos modelos de multi escala, é apresentado como obter as propriedades viscoelásticas homogeneizadas do RVE analisado. Também é apresentado a implementação computacional e por fim os exemplos numéricos.

3.1 MODELO REOLÓGICO UNIDIMENSIONAL

Consideremos um material isotrópico viscoelástico linear onde a relação tensão-deformação é dado por

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G_{\alpha}(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.1)$$

onde G_{α} é o *módulo complexo*, e t é o *tempo* e τ a variável de integração. É possível separar a relação constitutiva em duas partes, designadas através de $\alpha = 1$ ou 2 subscrito referindo respectivamente, parte desviadora e volumétrica. O modelo prevê qualquer tipo de histórico de deformação. Considerando um histórico de deformação particular em que a deformação é harmônica de amplitude e frequência constante, descrita por,

$$\varepsilon^{\alpha}(\tau) = \varepsilon_0 e^{i\omega\tau}, \quad (3.2)$$

onde $\varepsilon^{\alpha}(t)$ é a *deformação alternante no instante τ* , ε_0 é a *amplitude de deformação*, ω é a *frequência de excitação* e i é a *unidade complexa*. Substituindo (3.2) em (3.1), temos

$$\sigma(\tau) = \int_{-\infty}^t G_{\alpha}(t - \tau) \frac{d(\varepsilon_0 e^{i\omega\tau})}{d\tau} d\tau. \quad (3.3)$$

Admita-se que o módulo complexo pode ser dividido em duas partes, uma dependente do tempo e outra constante no tempo:

$$G_\alpha(t) = \overset{\circ}{G}_\alpha + \hat{G}_\alpha(t), \quad (3.4)$$

onde $\overset{\circ}{G}_\alpha$ é o *módulo complexo constante durante o tempo* e o \hat{G} é o *módulo complexo variável no tempo*, sendo este último satisfaz à seguinte propriedade:

$$\hat{G}_\alpha(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

como consequência, tem-se que

$$G_\alpha(t) = \overset{\circ}{G}_\alpha \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Substituindo os termos definidos anteriormente na equação (3.4) ficamos com

$$\sigma^a = \underbrace{\int_{-\infty}^t \overset{\circ}{G}_\alpha \frac{d(\varepsilon_0 e^{i\omega\tau})}{d\tau} d\tau}_{A(t)} + \underbrace{\int_{-\infty}^t \hat{G}_\alpha(t - \tau) \frac{d(\varepsilon_0 e^{i\omega\tau})}{d\tau} d\tau}_{B(t)}. \quad (3.7)$$

Integrando o termo $A(t)$,

$$A(t) = \overset{\circ}{G}_\alpha \varepsilon_0 e^{i\omega\tau} \Big|_{-\infty}^t, \quad (3.8)$$

e substituindo os limites, temos

$$A(t) = \overset{\circ}{G}_\alpha \varepsilon_0 \left[e^{i\omega t} - e^{i\omega(-\infty)} \right], \quad (3.9)$$

como

$$\lim e^{i\omega\tau}, \tau \rightarrow -\infty = 0, \quad (3.10)$$

resulta a seguinte equação,

$$A = \overset{\circ}{G}_\alpha \varepsilon_0 e^{i\omega t}. \quad (3.11)$$

Integrando a segunda parte, $B(t)$,

$$B(t) = \varepsilon_0 i\omega \int_{-\infty}^t \hat{G}_\alpha(t - \tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (3.12)$$

realizando a troca das variáveis temporais para η ,

$$\eta = t - \tau \quad \rightarrow \quad \tau = t - \eta, \quad (3.13)$$

derivando,

$$d\tau = -d\eta \quad (3.14)$$

e trocando os limites da integral quando $\tau \geq -\infty$,

$$\eta = t - (-\infty) = \infty \quad (3.15)$$

e $\tau = t$

$$\eta = t - t = 0. \quad (3.16)$$

Substituindo o que foi definido na equação (3.12), ficamos com a seguinte integral

$$B(t) = \varepsilon_0 i \omega \int_{\infty}^0 \hat{G}_{\alpha}(\eta) e^{i\omega(t-\eta)} (-1) d\eta, \quad (3.17)$$

ao trocarmos o limite superior pelo inferior e trocamos o sinal da integral, obtém-se

$$B(t) = \varepsilon_0 i \omega \int_0^{\infty} \hat{G}_{\alpha}(\eta) e^{i\omega(t-\eta)} d\eta. \quad (3.18)$$

Utilizando as propriedades de potência, separa-se os termos da exponencial,

$$B(t) = \varepsilon_0 i \omega \int_0^{\infty} \hat{G}_{\alpha}(\eta) e^{i\omega t} e^{-i\omega\eta} d\eta, \quad (3.19)$$

como o termo $e^{i\omega t}$ é constante em função de η , é possível retirá-lo da integral, ficando com a expressão

$$B(t) = \varepsilon_0 i \omega \int_0^{\infty} \hat{G}_{\alpha}(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta e^{i\omega t}, \quad (3.20)$$

expandido a parcela $e^{-i\omega\eta}$ usando a identidade trigonométrica de Euler,

$$e^{-i\omega\eta} = \cos(\omega\eta) - i \operatorname{sen}(\omega\eta), \quad (3.21)$$

e substituindo na equação (3.20) e organizando os termos, temos

$$B(t) = \left[i\omega \int_0^{\infty} \hat{G}_{\alpha}(\eta) \cos(\omega\eta) d\eta + \omega \int_0^{\infty} \hat{G}_{\alpha}(\eta) \operatorname{sen}(\omega\eta) d\eta \right] \varepsilon_0 e^{i\omega t}. \quad (3.22)$$

Ao substituírmos as equações (3.11, 3.22) em (3.7) temos,

$$\sigma^a = \dot{G}_\alpha \varepsilon_0 e^{i\omega t} + \left[i\omega \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \cos(\omega\eta) d\eta + \omega \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \sin(\omega\eta) d\eta \right] \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (3.23)$$

Organizando os termos e isolando a amplitude de deformação alternante em evidência, temos

$$\sigma^a = \left[\dot{G}_\alpha + \omega \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \sin(\omega\eta) d\eta + i\omega \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \cos(\omega\eta) d\eta \right] \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

pode-se identificar que o termo entre colchetes é uma entidade que relaciona uma deformação alternante, $\varepsilon_0 e^{i\omega t}$, com a tensão alternante, σ^a , defini-se a seguinte equação,

$$\sigma^a = G_\alpha^*(i\omega) \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad (3.25)$$

onde G_α^* é o *módulo complexo* que depende apenas da frequência de excitação, e pode ser dividido em parte *real* e *imaginária*,

$$G_\alpha^*(i\omega) = G_\alpha'(\omega) + iG_\alpha''(\omega) \quad (3.26)$$

sendo, G_α' é o *módulo dinâmico* e G_α'' é o *módulo de perda*, onde cada parcela é definida da equação (3.24) por,

$$G_\alpha'(\omega) = \dot{G}_\alpha + \omega \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \sin(\omega\eta) d\eta, \quad (3.27)$$

$$G_\alpha''(\omega) = \omega \int_0^\infty \hat{G}_\alpha(\eta) \cos(\omega\eta) d\eta. \quad (3.28)$$

Outra entidade definida é a *tangente do ângulo de defasagem* ($\tan \phi$) que é escrito em função da razão entre os módulos de perda e o módulo dinâmico, representa pela expressão

$$\tan \phi = \left[\frac{G_\alpha''(\omega)}{G_\alpha'(\omega)} \right]. \quad (3.29)$$

As equações (3.26) e (3.29) representam as relações constitutivas viscoelásticas para excitação definida por um histórico de deformação de amplitudes e frequência constantes.

3.2 MODELO TRIDIMENSIONAL

Nesta seção é apresentado como obter o comportamento do material viscoelástico isotrópico sob uma solitação harmônica triaxial, a partir do modelo reológico unidimensional.

Aplicando os conhecimentos de mecânica dos sólidos dividimos o tensor tensão em duas partes independentes

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.30)$$

onde \boldsymbol{s} é o *tensor tensão deviatórico*, e $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ é o *tensor tensão volumétrico* cada um deles é definido no domínio da frequência por

$$\boldsymbol{s}(i\omega) = G_1^*(i\omega) : \boldsymbol{e}(\omega), \quad (3.31)$$

onde \boldsymbol{e} é o *tensor deformação deviatórico*, definido

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{1}, \quad (3.32)$$

e a segunda parcela do segundo termo da equação (3.30) é definido pela expressão

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(i\omega) = G_2^*(i\omega) : \boldsymbol{\Theta}(\omega), \quad (3.33)$$

onde $\boldsymbol{\Theta}$ é o *tensor deformação volumétrico* definido por,

$$\boldsymbol{\Theta} \equiv tr(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{1} \quad (3.34)$$

Define-se o *tensor de comportamento dinâmico* pela expressão

$$\mathbb{G} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.35)$$

e substituindo a equação (3.35) em (3.30), tem se

$$\mathbb{G} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} (\boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (3.36)$$

usando a regra da cadeia e expandindo a derivada, obtém-se

$$\mathbb{G} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbb{G}_1} + \underbrace{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbb{G}_2}. \quad (3.37)$$

Os tensores \mathbb{G}_1 e \mathbb{G}_2 são os *tensores dinâmico deviatórico* e *volumétrico* respectivamente. Uma vez identificadas as parcelas que compõem o tensor de comportamento dinâmico, pode-se trabalhar de forma independente com cada uma delas. Em relação ao tensor deviatórico se tem da definição,

$$\mathbb{G}_1 = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.38)$$

Substituindo os termos pelas equações (3.31) e (3.32) temos

$$\mathbb{G}_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} (G_1^* \mathbf{e}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \right). \quad (3.39)$$

Derivando os termos ficamos com

$$\mathbb{G}_1 = G_1^* \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right). \quad (3.40)$$

Substituindo G_1^* pela sua forma polar, tem-se a expressão

$$\mathbb{G}_1 = (G_1' + iG_1'') \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right), \quad (3.41)$$

onde \mathbf{I} é o *tensor identidade de 4ª ordem* e $\mathbf{1}$ é o *tensor de identidade de 2ª ordem*. Para \mathbb{G}_2 temos as mesmas etapas para obter o módulo dinâmico volumétrico,

$$\mathbb{G}_2 = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.42)$$

Substituindo as equações (3.33, 3.34),

$$\mathbb{G}_2 = \frac{\partial}{\partial \Theta} (G_2^* \Theta) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \right), \quad (3.43)$$

e derivando temos

$$\mathbb{G}_2 = G_2^* (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}). \quad (3.44)$$

Substituindo G_2^* pela sua forma polar, obtém-se a equação

$$\mathbb{G}_2 = (G'_2 + iG''_2) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}). \quad (3.45)$$

Somando os dois termos que compõem o tensor de comportamento dinâmico,

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 + \mathbb{G}_2, \quad (3.46)$$

resulta a seguinte expressão

$$\mathbb{G} = (G'_1 + iG''_1) \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + (G'_2 + iG''_2) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \quad (3.47)$$

Agrupando os termos reais e os imaginários, obtemos

$$\mathbb{G} = G'_1 \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + G'_2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + i \left[G''_1 \left(\frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + G''_2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right]. \quad (3.48)$$

Tem-se como definir a parte real e a parte imaginária do tensor de comportamento dinâmico. A parte real é dada por,

$$\mathbb{G}' = G'_1 \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + G'_2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad (3.49)$$

onde \mathbb{G}' é o *tensor de elasticidade* e o *tensor de perda* representada por \mathbb{G}'' , fica da seguinte forma,

$$\mathbb{G}'' = G''_1 \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + G''_2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}). \quad (3.50)$$

A soma das duas partes é o tensor de comportamento dinâmico, representado pela expressão,

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}' + i\mathbb{G}'' \quad (3.51)$$

A relação constitutiva viscoelástica triaxial é representada pela equação,

$$\boldsymbol{\sigma}(i\omega) = \mathbb{G}(i\omega) : \boldsymbol{\varepsilon}(\omega). \quad (3.52)$$

3.3 MODELAGEM MULTI ESCALA VISCOELÁSTICA

Nesta seção é apresentada a implementação do modelo de material viscoelástico no modelo multi escala proposto no capítulo anterior.

3.3.1 Definição dos tensores deformação

Para uma frequência ω dada, a estrutura matemática do problema de equilíbrio no domínio da frequência é análogo ao de um caso estático, com a diferença que os campos de deformação, tensão e tensor material são grandezas complexas dependentes da frequência de excitação. Adicionalmente, no modelo de viscoelasticidade linear, como seu nome indica, esta relação de campos é consequentemente linear. Assim a abordagem de homogeneização utilizada no Capítulo 2 para problemas de elasticidade linear quase estática se repete para o presente caso, com a consideração de se trabalhar com campos de grandezas complexas.

No modelo proposto, a macroescala relaciona-se com a microescala através do tensor de deformação macroscópica. Se a macroescala está sofrendo solicitações harmônicas, pode-se definir o tensor deformação macroscópico dependente da frequência, definido pela expressão

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, \omega, t) = \boldsymbol{\epsilon}_0 e^{i\omega t}. \quad (3.53)$$

Substituindo o tensor deformação macroscópico na equação (2.3) fica-se com a seguinte decomposição aditiva do deslocamento microscópico

$$\mathbf{u}_\mu(\mathbf{y}, \omega, t) = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, \omega, t)\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, \omega, t), \quad (3.54)$$

e o tensor deformação fica com a seguinte decomposição

$$\boldsymbol{\epsilon}_\mu(\mathbf{y}, \omega, t) = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, \omega, t) + \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}, \omega, t). \quad (3.55)$$

3.3.2 Tensor de tensão viscoelástico

No modelo linear, pode-se ver na equação (2.26) o campo de deslocamentos flutuantes é a resposta mecânica para que o RVE entre em equilíbrio com um termo de carga produzido pela deformação macroscópica. O modelo

viscoelástico tem o mesmo comportamento em relação ao campo de deslocamentos flutuantes, definido pela expressão,

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbb{G}(i\omega) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \omega, t) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV = - \int_{\Omega_\mu} \mathbb{G}(i\omega) : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, \omega) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV. \quad (3.56)$$

Cabe destacar ainda que, devido a presente análise ter sido restrita a microestruturas de comportamento viscoelástico linear, esse tipo de comportamento quando submetido a uma deformação harmônica e amplitude e frequência constantes, a equação de equilíbrio (3.56) define uma relação linear entre o campo de deslocamento microscópico $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ e a deformação macroscópica $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$.

3.3.3 Tensor de comportamento dinâmico homogeneizado

O cálculo do tensor de comportamento dinâmico homogeneizado segue a mesma sequência apresentada no capítulo anterior. A parcela linear é realizada de seguinte maneira,

$$\mathbb{G}^T(i\omega) = \sum_{n=1}^m [\gamma^n \mathbb{G}^n(i\omega)], \quad (3.57)$$

Onde γ^n é a fração volumétrica da fase n ,

$$\gamma^n = \frac{V^n}{V_\mu}. \quad (3.58)$$

Para a parcela flutuante, de forma análoga à equação (2.54)

$$[\tilde{\mathbb{G}}(i\omega)]_{kl ij} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} [\mathbb{G}_\mu(\mathbf{y}, i\omega)]_{kl pq} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{ij}(\mathbf{y}, i\omega)]_{pq} dV (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (3.59)$$

onde $\tilde{\mathbb{G}}$ foi definido como

$$\tilde{\mathbb{G}}(i\omega) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbb{G}(\mathbf{y}, i\omega) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_{c_{ij}}(\mathbf{y}, i\omega) dV \quad (3.60)$$

Somando as duas parcelas ficamos com

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(\mathbf{x}, \omega) = \mathbb{G}^T(i\omega) : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, \omega, t) + \tilde{\mathbb{G}}(i\omega) : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, \omega, t), \quad (3.61)$$

e o tensor de comportamento dinâmico homogeneizado é constituído da soma das duas parcelas, a linear e a flutuante

$$\mathbb{G}_h(i\omega) = \mathbb{G}^T(i\omega) + \tilde{\mathbb{G}}(i\omega). \quad (3.62)$$

3.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesta seção é apresentada a implementação computacional do tensor constitutivo viscoelástico em função da frequência. A implementação computacional das outras entidades foi apresentado no capítulo anterior.

Como vimos, o tensor de comportamento dinâmico é composto por uma parte real e outra parte imaginária, demonstrada pela expressão

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}' + i\mathbb{G}'', \quad (3.63)$$

onde cada parcela é representada por

$$\mathbb{G}' = G'_1 \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) + G'_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad (3.64)$$

$$\mathbb{G}'' = G''_1 \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) + G''_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}). \quad (3.65)$$

Definindo os operadores,

$$\mathbb{I}_1 = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad (3.66)$$

para substituímos nas equações (3.64, 3.65) e passando para anotação indicial utilizando o operador *delta de Kronecker*, δ , ficamos com

$$\mathbb{I}_1 = \delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (3.67)$$

Define-se um segundo operador

$$\mathbb{I}_2 = \mathbf{I} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}, \quad (3.68)$$

e, por último, um terceiro operador que é uma relação entre os dois anteriores

$$\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_2 - \frac{1}{3}\mathbb{I}_1. \quad (3.69)$$

Substituindo os operadores nas equações (3.64, 3.65) temos,

$$\mathbf{G}' = G'_1 \mathbb{I}_3 + G'_2 \mathbb{I}_1, \quad (3.70)$$

$$\mathbf{G}'' = G''_1 \mathbb{I}_3 + G''_2 \mathbb{I}_1. \quad (3.71)$$

Assim tem-se o tensor de comportamento dinâmico à ser usado na implementação computacional

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G}' + i\mathbf{G}''. \quad (3.72)$$

3.5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

A implementação do código para o comportamento do material viscoelástico não tem muitos problemas. Uma restrição que foi observada é a resolução do sistema linear (limitada pelo hardware e software utilizado), porque resolver sistemas lineares complexos tem maior gasto computacional. No modelo viscoelástico possui parcelas complexas associados a matriz de rigidez do material, consequentemente aumentando a dependência das equações no sistema linear.

3.6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos. O primeiro modelo é a reprodução das homogeneizações das análises do artigo (YI; PARK; YOUN, 2000) onde são realizadas várias análises para determinação das propriedades homogeneizadas de RVE's bidimensionais. O segundo exemplo numérico é proposta a determinação das propriedades homogeneizadas de um RVE tridimensional sobre deformação com amplitude e frequência constante no tempo.

3.6.1 Exemplo numérico

O artigo propõem projetar microestruturas compostas de materiais viscoelásticos otimizando as propriedades de amortecimento homogeneizadas dado uma função objetivo. Para determinar a melhor microestrutura o artigo apresentou a técnica de otimização topológica, onde foi determinada a densi-

dade do material de cada elemento finito, variando entre 0 e 1, onde 1 é um material e 0 é outro.

Todas as análises são feitas a partir de um compósito padrão. Esse sendo um RVE quadrado, com aresta composta de 12 elementos finitos bilineares estruturados, são 144 elementos no RVE. A classe de condição de contorno que é utilizada para as análises é a de deslocamentos periódicos no contorno.

3.6.1.1 Exemplo 1

Neste primeiro exemplo, a microestrutura é composta de um material de fase elástica e outro de fase viscoelástica. O material de fase elástica tem as seguintes propriedades:

$$E = 70 \quad \nu = 0.22, \quad (3.73)$$

já o material de comportamento viscoelástico,

$$E(t) = 1 + 2.5e^{-t} \quad \nu = 0.35 \quad (3.74)$$

A microestrutura inicial em todas as análises do artigo é quadrada com uma inclusão circular no centro do RVE, demonstrada na Figura 13 (a). A proporção entre materiais é de 50% para cada um, é definido como Compósito 1 o RVE inicial com material elástico na inclusão e o material viscoelástico por fora. O Compósito 2 o RVE inicial com troca de materiais um pelo outro. No primeiro exemplo tem as seguintes restrições:

$$\max \tan \delta_{11}(\omega) (= \tan \delta_{22}(\omega)) \quad \text{onde } \omega = 0.5 \quad (3.75)$$

$$\text{sujeito } \begin{cases} G'_{11}(\omega) = G'_{22}(\omega) \geq 15.0 \\ \text{proporção de 50\% entre materiais} \\ 2 \text{ planos de simetria geométrica.} \end{cases} \quad (3.76)$$

Dadas essas restrições a microestrutura ótima apresentada no artigo é representada na Figura 13 (b). Na Tabela 2 são apresentados os dados obtidos da homogeneização das microestruturas analisadas.

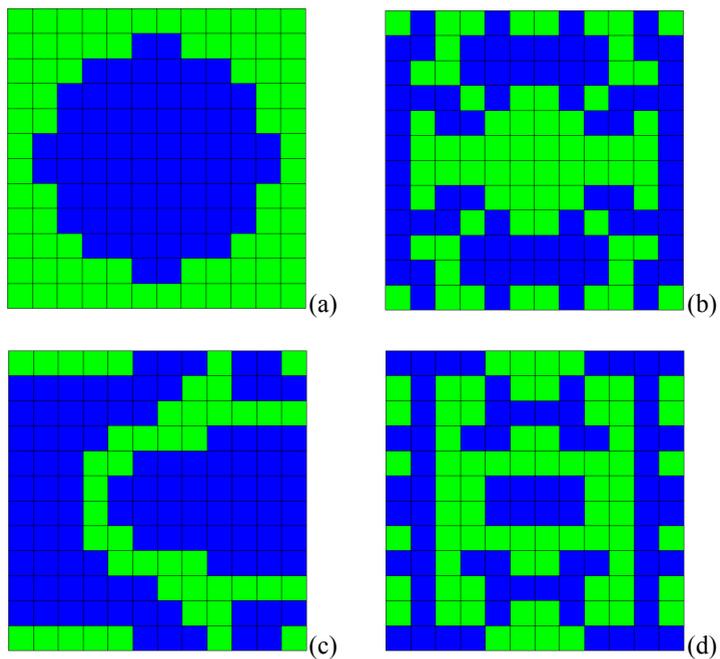


Figura 13: Malhas que foram utilizadas nos ensaios numéricos. A malha(a) é o Compósito 1 e 2, em (b) é o Compósito ótimo do exemplo 1, em (c) é o Compósito ótimo do exemplo 2, em (d) é o Compósito ótimo do exemplo 3.

Tabela 2
Módulo complexo efetivo para exemplo 1 (Artigo)

	Frequência, ω	Módulo Dinâmico, $G'_{11}(\omega)$	Módulo de Perda, $G''_{11}(\omega)$	$\tan \delta_{11}(\omega)$
Material 1	0,5	73,56	0,00	0,000
Material 2	0,5	1,17	1,14	0,667
Composito 1	0,5	4,58	2,83	0,618
Composito 2	0,5	24,84	1,10	0,044
Composito Ótimo	0,5	15,01	2,76	0,184

	Frequência, ω	Storage Modulus, $G'_{11}(\omega)$	Loss Modulus, $G''_{11}(\omega)$	$\tan \delta_{11}(\omega)$
Composito 1	0,5	4,969	2,984	0,600
Composito 2	0,5	22,901	1,434	0,062
Composito Ótimo	0,5	15,331	2,827	0,184

Analisando os resultados apresentados na Tabela 2, é possível constatar a variação dos resultados do artigo e do método implementado. Essa diferença é dada pela forma que são tratadas as propriedades do material no método de elementos finitos. No artigo as propriedades do material nos elementos finitos pode variar linearmente de um material para outro. Na implementação proposta foi adotado um material ou outro, de acordo com a imagem da microestrutura apresentada no artigo. No caso da microestrutura inicial (Compósito 1 e 2), dos 144 elementos, 68 elementos pertencem a inclusão e 76 elementos a matriz. No módulo dinâmico as diferenças foram no máximo de 8.5%, mas no módulo de perda e no tangente foi de até 40%. Já no Compósito Ótimo (Figura 13b) a diferença de valores foi menor, no módulo dinâmico ficou 6.8%, já no módulo de perda foi a maior diferença, 37% e no tangente ficou 0.2%.

O gráfico representado na Figura 14 representa a evolução do módulo dinâmico, módulo de perda(gráfico da esquerda) e tangente(gráfico da direita) dos Compósito 1 em azul, Compósito 2 em vermelho e em verde o Compósito Ótimo. Observando o gráfico da esquerda é possível perceber a mudança de comportamento dos Compósitos relacionando os módulos dinâmico e de perda com a frequência, a linha contínua é o modulo dinâmico. Ao lado esquerdo do gráfico tem-se o comportamento borrachoso e ao lado direito o comportamento vítreo. A linha tracejada representa o módulo de perda que atinge os seus maiores valores juntamente no intervalo da frequência de transição do comportamento borrachoso para vítreo do módulo dinâmico, fora desse intervalo o valor do módulo de perda tende a zero. No gráfico da direita tem-se a evolução da tangente em relação da frequência dos três Compósitos analisados. A linha azul representando o Compósito 1 tem seu maior valor na intersecção com a linha preta na vertical essa representando a frequência de 0.5. Os Compósitos 2 e o Ótimo tem valores máximos a direita da linha preta vertical, ou seja, caso a análise ocorresse em uma frequência maior esses compósitos teriam capacidade de dissipar mais energia em relação a frequência de referência.

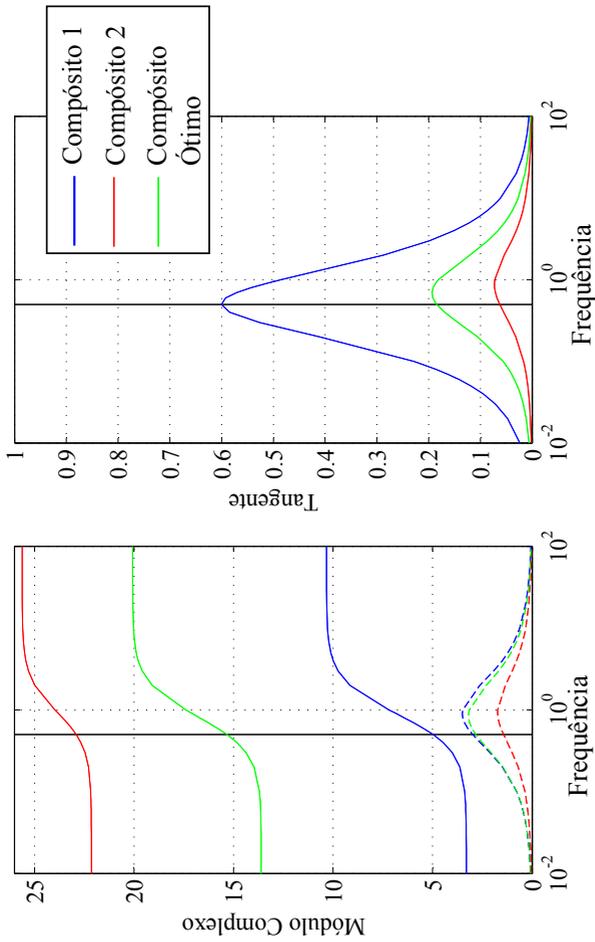


Figura 14: O gráfico da esquerda mostra a evolução do comportamento do *Módulo Dinâmico*(linha contínua) e do *Módulo de Perda*(linha tracejada) em relação da frequência de excitação. No gráfico da direita temos a evolução da tangente em relação com a frequência. Onde a cor azul refere-se ao Composito 1, o vermelho ao Composito 2 e o verde ao Composito Ótimo. A linha preta na vertical representa a frequência de 0.5 onde foram retirados os dados para a Tabela 2.

3.6.1.2 Exemplo 2

No segundo exemplo são usados os mesmos materiais do primeiro exemplo. A microestrutura está sobre excitação harmônica unidirecional. É proposto que a microestrutura tenha maior capacidade de dissipar mais energia na direção da excitação a uma determinada frequência. As restrições da microestrutura são:

$$\max \tan \delta_{11}(\omega) \quad \text{onde } \omega = 0.5 \quad (3.77)$$

$$\text{sujeito } \begin{cases} G'_{11}(\omega) = G'_{22}(\omega) \geq 15.0 \\ 1 \text{ plano de simetria geométrica.} \end{cases} \quad (3.78)$$

O Compósito Ótimo para essas restrições está representado na Figura 13(c). Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 3 em conjunto com os resultados do artigo. Na Tabela 3, constata-se novamente uma variação nos resultados do artigo comparado com o método implementado. Essa diferença é recorrente da forma que é tratado as propriedades do material no método dos elementos finitos. Comparado os resultados, as diferenças são menores que no exemplo 1, no módulo dinâmico é de 2.15%, no módulo de perda é de 2.52% e de 4,8% no tangente.

Tabela 3
Módulo complexo efetivo para exemplo 2 (Artigo)

	Frequência, ω	Módulo Dinâmico, $G'_{11}(\omega)$	Módulo de Perda, $G''_{11}(\omega)$	$\tan \delta_{11}(\omega)$
Material 1	0,5	73,56	0,00	0,000
Material 2	0,5	1,17	1,14	0,667
Compósito 1	0,5	4,58	2,83	0,618
Compósito 2	0,5	24,84	1,10	0,044
Compósito Ótimo	0,5	15,01	6,58	0,438

Módulo complexo efetivo para exemplo 1 (calculado)				
	Frequência, ω	Módulo Dinâmico, $G'_{11}(\omega)$	Módulo de Perda, $G''_{11}(\omega)$	$\tan \delta_{11}(\omega)$
Compósito Ótimo	0,5	14,690	6,746	0,459

Nos gráficos representados na Figura 15 mostra a evolução do módulo dinâmico, módulo de perda e tangente do Compósito Ótimo do exemplo 2. A linha preta na vertical é a frequência que foram obtido os dados para a Tabela 3. Na esquerda da Figura 15 está o gráfico que relaciona o módulo dinâmico(linha contínua) e o módulo de perda(linha tracejada) com a frequência. Observando o gráfico da direita, onde relaciona o tangente com a frequência, é possível constatar que o ponto de máximo está na intersecção com a linha vertical, atendendo a função objetivo do exemplo, equação (3.77,3.78)

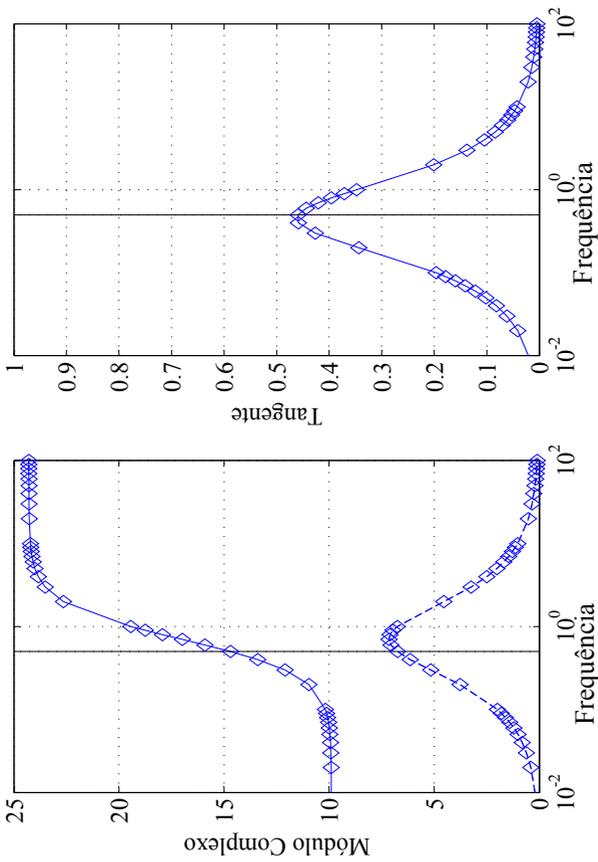


Figura 15: O gráfico da esquerda mostra a evolução do comportamento do *módulo dinâmico* (linha contínua) e do *módulo de perda* (linha tracejada) em relação da frequência de excitação. No gráfico da direita temos a evolução da tangente em relação com a frequência.

3.6.1.3 Exemplo 3

Neste exemplo foi utilizado dois materiais viscoelásticos para constituir a microestrutura. Para o material de fase viscoelástica 1 tem-se as seguintes propriedades:

$$E(t) = 0.5 + 3e^{-\frac{t}{10}} \quad \nu = 0.35, \quad (3.79)$$

já o material de fase viscoelástica 2,

$$E(t) = 0.5 + 3e^{-t} \quad \nu = 0.35. \quad (3.80)$$

Diferente dos outros exemplos foram analisadas duas frequências, uma de 0.04 onde um material de fase viscoelástica 1 tem grande amortecimento, e outra frequência foi de 0.4 onde o outro material tem grande amortecimento. Os Compósitos iniciais são os mesmos do exemplo 1, é uma microestrutura com uma inclusão circular no meio. O Compósito 1 o material de fase viscoelástica 1 está na inclusão e o material de fase viscoelástica 2 está na matriz, e vice-versa no Compósito 2. As restrições da microestrutura são:

$$\max \tan \delta_{11}(\omega_1) + \tan \delta_{11}(\omega_2) \quad \text{onde } \omega_1 = 0.04, \omega_2 = 0.4 \quad (3.81)$$

$$\text{sujeito} \begin{cases} G'_{11}(\omega_1) = G'_{22}(\omega_1), G'_{11}(\omega_2) = G'_{22}(\omega_2) \\ G''_{11}(\omega_1) = G''_{22}(\omega_1), G''_{11}(\omega_2) = G''_{22}(\omega_2) \\ \text{proporção de 50\% entre materiais} \\ \text{2 planos de simetria geométrica.} \end{cases} \quad (3.82)$$

O Compósito Ótimo 1 está ilustrado na Figura 13(d), o Compósito Ótimo 2 não foi mostrado no artigo, então não foi possível de fazer a análise. Na Tabela 3 apresentam os valores obtidos nas análises.

Tabela 3
Módulo complexo efetivo para exemplo 3 (Artigo)

	Frequência, ω	Módulo Dinâmico, $G'_{11}(\omega)$	Módulo de Perda, $G''_{11}(\omega)$	$\tan \delta_{11}(\omega)$
Material 1	0,04	1,04	1,18	1,132
	0,4	3,79	0,80	0,212
Material 2	0,04	0,58	0,14	0,237
	0,4	1,04	1,18	1,132
Compósito 1	0,04	0,84	0,43	0,510
	0,4	2,02	1,36	0,672
Compósito 2	0,04	0,81	0,52	0,637
	0,4	2,14	1,19	0,555
Compósito Ótimo 1	0,04	0,83	0,48	0,583
	0,4	2,11	1,26	0,600
Compósito Ótimo 2	0,04	0,83	0,49	0,596
	0,4	2,12	1,25	0,588

	Frequência, ω	Módulo Dinâmico, $G'_{11}(\omega)$	Módulo de Perda, $G''_{11}(\omega)$	$\tan \delta_{11}(\omega)$
Compósito Ótimo 1	0,04	0,831	0,469	0,564
	0,4	2,087	1,287	0,616

Módulo complexo efetivo para exemplo 3 (calculado)

Comparando os valores obtidos da homogeneização com os do artigo, constatasse que a variação é a menor dos três exemplos apresentados. O motivo novamente é o tratamento das propriedades do material no método dos elementos finitos. Neste exemplo não tem a variação de forma linear de um material para outro. A maior diferença percentual dos valores foi de 3.25% no tangente à uma frequência de 0.04.

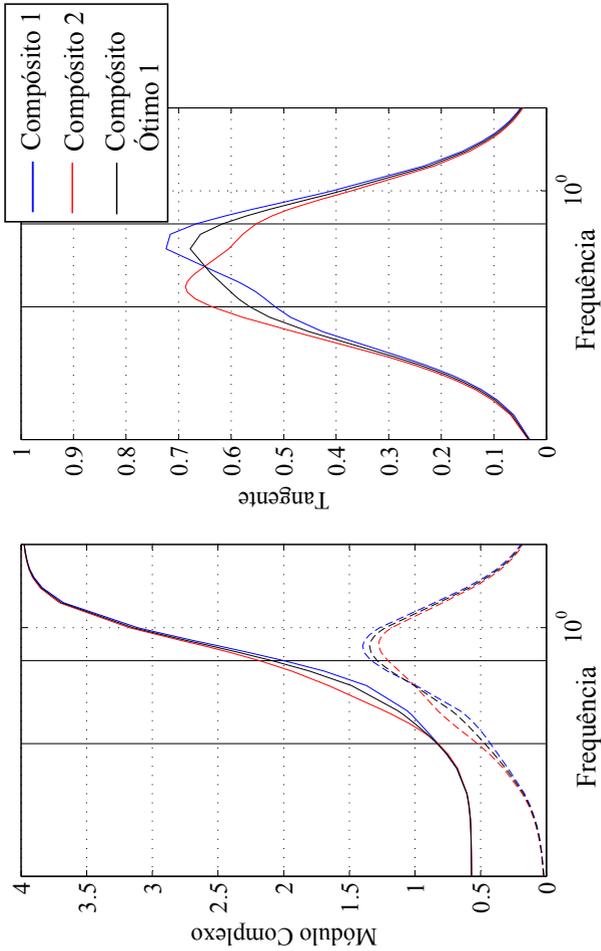


Figura 16: O gráfico da esquerda mostra a evolução do comportamento do *módulo dinâmico* (linha contínua) e do *módulo de perda* (linha tracejada) em relação da frequência de excitação. No gráfico da direita temos a evolução da tangente em relação com a frequência. Em azul representa o Compósito 1, em vermelho o Compósito 2 e em preto o Compósito Ótimo 1.

Na esquerda da Figura 16 está o gráfico que representa a evolução do módulo dinâmico e o módulo de perda em função da frequência, na direita está a evolução do tangente em função da frequência. Na cor azul representa o Compósito 1, em vermelho o Compósito 2 e em preto o Compósito Ótimo 1. As duas linhas em preto na vertical dos gráficos representam as frequências que foram avaliadas na Tabela 3, a linha da esquerda é a frequência de 0.04 e da direita de 0.4. Interessante ressaltar que o Compósito 1, 2 e o Ótimo tem a mesma razão entre os dois materiais. O comportamento na fase borra-chosa e na fase vítrea são iguais. A variação é ressaltada na transição entre um comportamento e outro, relacionada diretamente com a configuração da microestrutura do RVE.

3.6.2 Microestruturas tridimensionais

Neste último exemplo foi proposta uma análise para determinação das propriedades homogeneizadas de uma microestrutura tridimensional. Esta microestrutura é composta por dois materiais com fase viscoelástica distintas.

Para o material de fase viscoelástica 1 tem as seguintes propriedades:

$$E(t) = 250 + 200e^{-\frac{t}{0.3}} \quad \nu = 0.35, \quad (3.83)$$

já o material de fase viscoelástica 2,

$$E(t) = 250 + 100e^{-\frac{t}{50}} \quad \nu = 0.35, \quad (3.84)$$

A microestrutura foi definida da forma que tem três planos de simetria. A configuração escolhida está ilustrada na Figura (17), o RVE é um cubo com uma semiesfera centrada em cada face e um oitavo de esfera em cada vértice, todas as esferas possuem o mesmo raio. Foi adotado essa configuração para manter a condição de simetria dos planos e uma hipótese de que o comportamento homogeneizado seja isotrópico.

Na análise, foi definido uma proporção de 40% de material para as inclusões esféricas e 60% para a matriz, como mostra a Figura (17). O elemento finito utilizado nas análises foi o hexaédrico de 8 nós, foi utilizada malha estruturada onde todos os elementos possuíam o mesmos tamanho. O domínio é representado por um hexaedro composto pelos elementos, onde o número de elementos em todas as arestas são os mesmos. Para definir qual fase o elemento pertencia foi verificado se o centroide do mesmo cabia a uma

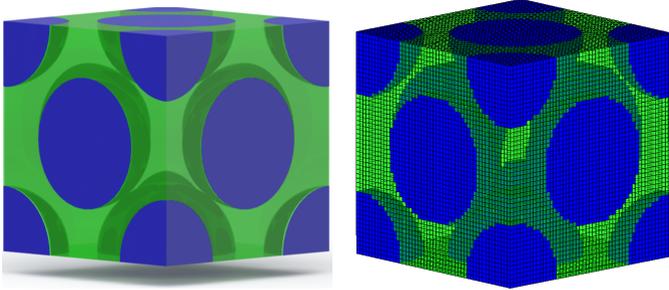


Figura 17: Microestrutura proposta.

das esferas, caso sim, ele teria as propriedades da fase 2, caso não, recebia as propriedades da fase 1.

Foi selecionado duas análises, uma aplicando a condição de contorno de deslocamento linear no contorno e outra aplicando deslocamento periódico no contorno. Ambas análises realizaram uma varredura na frequência para obtenção das propriedades homogeneizadas.

A primeira análise foi realizada com condições de contorno lineares no contorno, para aplicação da condição de contorno foi seguido a metodologia demonstrado anteriormente, é identificado os graus de liberdade que pertencem a fronteira da microestrutura. Através de manipulações matriciais são aplicados as condições de contorno nos graus de liberdade, que nesse caso é definido que os deslocamentos flutuantes na fronteira da microestrutura é nulo. Na segunda análise para impor as condições de contorno foram usadas manipulações matriciais, essas que são responsáveis para representar o acoplamento entre as faces opostas da microestrutura. Os deslocamentos flutuantes são livres, exceto os graus de liberdade nos vértices do contorno da microestrutura.

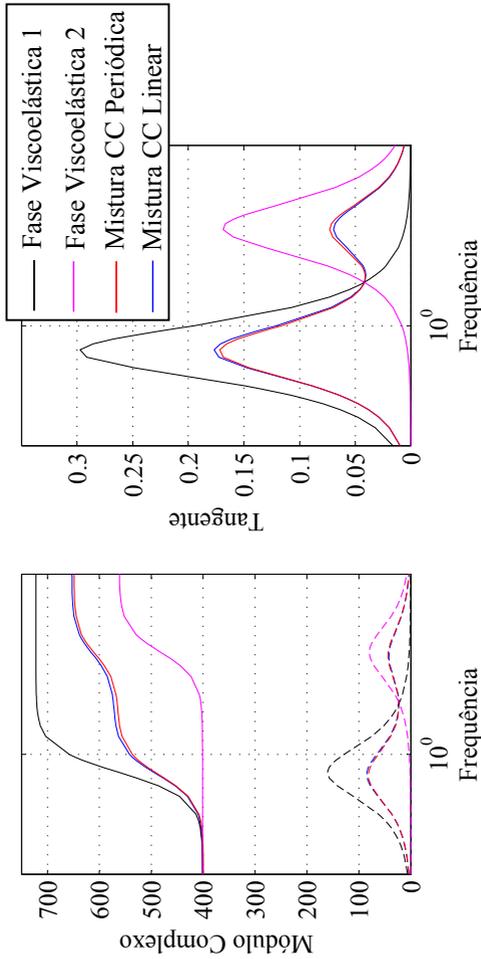


Figura 18: O gráfico da esquerda mostra a evolução do comportamento do *módulo dinâmico*(linha contínua) e do *módulo de perda*(linha tracejada) em relação da frequência de excitação. Em cor preta representa o comportamento da fase viscoelástica 1, em mangenta a fase viscoelástica 2, as cores azul e vermelha representa o comportamento da mistura onde em azul é a condição de contorno linear e a vermelha é a condição de contorno periódica.

Na Figura (18) está representada dois gráficos, o da esquerda relacionando o módulo dinâmico e módulo de perda com a frequência. Analisando o gráfico da esquerda, é possível perceber que inicialmente o comportamento homogeneizado é igual comparando as duas condições de contorno. Na transição do módulo dinâmico do comportamento borrachudo para vítreo, a condição de contorno linear demonstrou-se mais rígida, obtendo valores maiores que a condição periódica. E no módulo de perda houve a inversão no meio da transição, inicialmente a condição de contorno linear era levemente maior que a condição de contorno periódica, por fim a condição periódica é levemente maior que a linear. O comportamento do módulo de perda é repetido no gráfico da direita que demonstra a evolução do tangente em relação da frequência.

3.7 RESULTADOS

Os principais resultados foram obtidos pelos modelos numéricos para a representação de propriedades utilizando homogeneização numérica. Os modelos foram aplicados nos seguintes exemplos numéricos:

- Reprodução das homogeneizações numéricas de um Artigo (YANG; BECKER, 2004b), que adota microestruturas bidimensionais composta de material de comportamento linear.
- Reprodução das homogeneizações numéricas de um Artigo (YI; PARK; YOUN, 2000), que trata microestruturas bidimensionais composta de material de comportamento viscoelástico com histórico de deformação e amplitude e frequência constantes.
- Representação das propriedades homogeneizadas de uma micro-estrutura tridimensional composta de materiais de comportamento viscoelástico com histórico de deformação e amplitude e frequência constantes.

Embora os exemplos computacionais sejam simples, os resultados obtidos são satisfatórios e com alto custo computacional. As operações realizadas com as matrizes de projeção para impor as condições de contorno tem muito gasto computacional. Mas o fator limitador foi a resolução do sistemas lineares com parcelas complexas, que exigia grande capacidade de memória para resolve-lo.

Um dos pontos a ser ressaltado no trabalho é o método proposto para determinação das propriedades homogeneizadas, simples de ser implementado, tem-se a possibilidade de paralelização dessa etapa, assim reduzindo o tempo.

O método proposto mostra-se adequado perante uma análise do artigo (YANG; BECKER, 2004b), onde no artigo fornecia como resposta um acoplamento entre tensões normais e distorções no plano, porém a microestrutura é bidimensional e possui dois planos de simetria. Por fim não deve ter acoplamento entre tensões normais e distorções no plano, como foi obtido pelo método apresentado no artigo.

4 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como propósito desenvolver a representação das propriedades homogeneizadas de microestruturas heterogêneas, cuja a motivação está na necessidade de estabelecer uma relação entre a microestrutura e o histórico de deformação macroscópicos. Neste trabalho foram adotados modelos computacionais com as seguintes características: um com comportamento elástico linear e outro viscoelástico com histórico de deformação e amplitude constante. Inicialmente foi desenvolvida a modelagem para representação de propriedades homogeneizadas de microestruturas de materiais com comportamento elástico linear. Em seguida foi dada continuidade para a representação de propriedades homogeneizadas de microestruturas composta de materiais com o comportamento viscoelástico. Por fim, apresenta-se os resultados do trabalho que são satisfatórios e com alto custo computacional.

Os objetivos gerais atingidos neste trabalho são:

- i)* implementação computacional das diferentes representações de propriedades homogeneizadas de microestruturas. Essas compostas de materiais com comportamento elástico linear e viscoelástico.
- ii)* implementação das classes de condições de contorno da modelagem multi escala.
- iii)* aprendizagem do modelo constitutivo de materiais viscoelásticos com histórico de deformação com amplitude e frequência constantes.

4.1 PROPOSTAS DE ESTUDO

Ao longo do desenvolvimento do trabalho percebeu-se possíveis outras propostas de estudo. Essas são:

- melhorar o algoritmo para realizar homogeneização com maior capacidade de informação.
- implementar o código em um software comercial.
- realizar homogeneizações com modelos de microestruturas não isotrópicas.
- implementação dos modelos viscoelásticos dependente do tempo.

- aplicação do modelo em análises experimentais, por exemplo, identificação das propriedades homogeneizadas do asfalto.

REFERÊNCIAS

BERGER, H. et al. A Numerical Homogenization technique for Piezoelectric Composites with Arbitrary Fiber. *PACAM XI*, 2010. Disponível em: <<http://www.uni-magdeburg.de/ifme/l-numerik/quellen/PAC0121-BergerH.pdf>>.

CHRISTENSEN, R. *Theory of Viscoelasticity*. Dover Publications, 2003. (Civil, Mechanical and Other Engineering Series). ISBN 9780486428802. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=_tnm0cMWSNIC>.

De Souza Neto, E.; FEIJÓO, R. Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: Small and large strain kinematical formulation. *LNCC Research Development Report*, v. 16, p. 1–53, 2006. Disponível em: <<http://arquivosweb.lncc.br/pdfs/Feijoo-VariationalFound-versaofinaldez.pdf>>.

De Souza Neto, E.; FEIJÓO, R.; NETO, E. d. S. Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: Small and large strain kinematical formulation. *LNCC Research Development Report*, v. 16, p. 1–53, 2006. Disponível em: <<http://arquivosweb.lncc.br/pdfs/Feijoo-VariationalFound-versaofinaldez.pdf>>.

GEERS, M.; KOUZNETSOVA, V. G.; BREKELMANS, W. a. M. MultiScale First-Order and Second-Order Computational Homogenization of Microstructures towards Continua. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 1, n. 4, p. 371–386, 2003. ISSN 1543-1649. Disponível em: <<http://www.begellhouse.com/journals/61fd1b191cf7e96f,7910ba8e078c1422,0>>.

KOUZNETSOVA, V. *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*. Tese (Doutorado), 2002. Disponível em: <<http://www.narcis.nl/publication/RecordID/oai:library.tue.nl:560009/Language>>.

KOUZNETSOVA, V. G.; BREKELMANS, W. a. M.; BAAIJENS, F. P. T. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, v. 27, n. 1, p. 37–48, jan. 2001. ISSN 0178-7675. Disponível em: <<http://www.springerlink.com/openurl.asp?genre=article&id=doi:10.1007/s004>>.

- KOUZNETSOVA, V. G.; GEERS, M.; BREKELMANS, W. Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 48-51, p. 5525–5550, dez. 2004. ISSN 00457825. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782504002853>>.
- MICHEL, J.; MOULINEC, H.; SUQUET, P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 172, n. 1-4, p. 109–143, 1999. ISSN 00457825. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782598002278>>.
- MIEHE, C. Computational micro–macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. *Computational Materials Science*, v. 16, n. 1-4, p. 372–382, dez. 1999. ISSN 09270256. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0927025699000804>>.
- MIEHE, C. Computational micro-to-macro transitions for discretized micro-structures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 5-6, p. 559–591, jan. 2003. ISSN 00457825. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782502005649>>.
- MIEHE, C.; KOCH, A. Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, v. 72, n. 4-5, p. 300–317, jul. 2002. ISSN 09391533.
- PODSHIVALOV, L.; FISCHER, A.; BAR-YOSEPH, P. Z. 3D hierarchical geometric modeling and multiscale FE analysis as a base for individualized medical diagnosis of bone structure. *Bone*, Elsevier Inc., v. 48, n. 4, p. 693–703, abr. 2011. ISSN 1873-2763. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21193070>>.
- PODSHIVALOV, L.; FISCHER, A.; BAR-YOSEPH, P. Z. Multiscale FE method for analysis of bone micro-structures. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, Elsevier Ltd, v. 4, n. 6, p. 888–99, ago. 2011. ISSN 1878-0180. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21616470>>.

- YANG, Q.; BECKER, W. Effective stiffness and microscopic deformation of an orthotropic plate containing arbitrary holes. *Computers & Structures*, v. 82, n. 27, p. 2301–2307, out. 2004. ISSN 00457949. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045794904002020>>.
- YANG, Q. S.; BECKER, W. A comparative investigation of different homogenization methods for prediction of the macroscopic properties of composites. *CMESComputer Modeling In Engineering Sciences*, v. 6, n. 4, p. 319–332, 2004.
- YI, Y.-M.; PARK, S.-H.; YOUN, S.-K. Design of microstructures of viscoelastic composites for optimal damping characteristics. *International Journal of Solids and Structures*, v. 37, n. 35, p. 4791–4810, 2000.