

**Andresa Freitas**

**MODELOS NUMÉRICOS BASEADOS EM MEFG-C<sup>k</sup> e MEFG<sup>gl</sup>  
APLICADOS A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE E  
PLASTICIDADE BIDIMENSIONAL**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, Ph.D.

Coorientador: Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Florianópolis  
2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Freitas, Andresa

Modelos numéricos baseados em MEF8-Ck e MEF8g1 aplicados a problemas de elasticidade e plasticidade bidimensional / Andresa Freitas ; orientador, Paulo de Tarso Rocha de Mendonça ; coorientador, Clovis Sperb de Barcellos. - Florianópolis, SC, 2015.  
167 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 3. Método dos elementos finitos generalizados. 4. Funções de aproximação contínuas. 5. Análise global-local. I. Mendonça, Paulo de Tarso Rocha de. II. Barcellos, Clovis Sperb de. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

**Andresa Freitas**

**MODELOS NUMÉRICOS BASEADOS EM MEF<sub>G</sub>-C<sup>k</sup> e MEF<sub>G</sub><sup>gl</sup>  
APLICADOS A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE E  
PLASTICIDADE BIDIMENSIONAL**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 17 de Abril de 2015.

---

Paulo de Tarso R. de Mendonça, Ph.D. - Orientador

---

Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D. - Coorientador

---

Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.Eng.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Paulo de Tarso R. de Mendonça, Ph.D. - Presidente

---

Roberto Dalledone Machado, Dr.Eng. (UFPR) - Relator

---

Felício Bruzzi Barros, Dr.Eng. (UFMG)

---

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc. (UFSC)

---

Lauro César Nicolazzi, Dr.Eng. (UFSC)

---

Roberto Jordan, Dr.Eng. (UFSC)



# Agradecimentos

Aos meus orientadores Paulo de Tarso e Clovis Barcellos pelos ensinamentos, compromisso, dedicação e paciência.

Ao colega Diego Amadeu, que sempre esteve disposto a contribuir com meu aprendizado.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina, pela oportunidade de realizar este trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao meu esposo e minha família, pelo apoio e incentivo, principalmente ao meu pai, que desejou muito esta minha conquista e, infelizmente, não pudemos vivenciá-la e comemorá-la juntos, como planejamos.



# Resumo

Este trabalho propõe uma abordagem que acopla o método dos elementos finitos generalizados global-local (MEFG<sup>gl</sup>) e o MEFG- $C^K$  para a modelagem de problemas bidimensionais que contemplem concentração de tensões. O primeiro método combina o MEF global-local clássico com a estrutura da partição da unidade, construindo funções de enriquecimento numericamente. Estas funções são geradas a partir da solução de problemas de valor de contorno locais na vizinhança de características locais, sendo usadas para enriquecer o problema global. O segundo método é bastante similar ao MEFG clássico (MEFG- $C^0$ ), exceto pela partição da unidade ( $PU$ ) que é arbitrariamente suave, gerando campos de tensões arbitrariamente diferenciáveis, o que não é possível com o MEFG- $C^0$  devido à descontinuidade das derivadas normais ao longo das arestas dos elementos. O método proposto é chamado MEFG<sup>gl- $C^k$</sup>  e sua formulação utiliza funções  $PU C^k$  no problema local, construídas através da  $PU$  de Shepard, e funções  $PU C^0$  nos problemas globais inicial e enriquecido. Assim, o método proposto não depende de soluções analíticas e somente a solução local é usada no problema global como enriquecimento. Neste contexto, pretende-se comparar a performance do MEFG<sup>gl- $C^k$</sup>  com o MEFG<sup>gl</sup> clássico, analisando o efeito da regularidade da  $PU$  no desempenho das aproximações. Em muitas aplicações práticas de engenharia é comum analisar estruturas complexas que mostram, ao longo de grandes extensões, um comportamento elástico linear, mas que exibem plasticidade confinada em algumas pequenas regiões críticas. Estes tipos de problemas são importantes devido ao alto gradiente do campo de deformações que ocorre ao longo do contorno da zona de processo, que é difícil de repre-

sentar com malhas grosseiras e funções convencionais do MEF padrão. Desta forma, além do problema de elasticidade, também é modelado um problema elastoplástico com plasticidade confinada numa pequena região do domínio global. Neste caso, os problemas local e global enriquecido são solucionados com um modelo constitutivo elastoplástico e os custos computacionais relacionados às iterações não lineares, quando comparados ao MEEG clássico, podem ser reduzidos com o uso de uma malha grosseira na resolução do problema global. Para representar a resposta irreversível e efeitos de encruamento do material, é considerada a teoria da plasticidade  $J_2$  independente de taxa, com encruamento isotrópico do material e critério de plastificação de von Mises. É considerado apenas carregamento monotônico e a cinemática de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, com estado plano de deformações. O enriquecimento adotado no problema local é o polinomial uniforme e na interface global-local utiliza-se o método da penalidade, devido à sua simplicidade e generalidade para impor condições de contorno de Cauchy.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos generalizados  $C^K$ , análise global-local, elastoplasticidade.



# Abstract

This work investigates an approach that couples the global-local generalized finite element method (GFEM<sup>gl</sup>) and the GFEM- $C^K$  for modeling two-dimensional problems involving stress concentration. The first method combines classic global-local FEM with the partition of unit structure, building enrichment functions numerically. These functions are generated from the local solution of boundary value problems in the neighborhood of the local features, and are used to enrich the global problem. The second method is quite similar to classic GFEM (GFEM- $C^0$ ), except that the partition of unit (*PoU*) is arbitrarily smooth, building continuous stress fields, which is not possible with the GFEM- $C^0$  due to the discontinuity of the normal derivatives across interelement edges. The proposed method is called MEFG<sup>gl- $C^k$</sup>  and its formulation uses  $C^0$  *PoU* functions in the initial and the enriched global problems, and  $C^k$  *PoU* functions in local problem constructed by Shepard *PoU*. Thus, the proposed method does not rely on analytical solutions and only the local solution is used in the global problem as enrichment. In this context, the goal is to compare the MEFG<sup>gl- $C^k$</sup>  and classic MEFG<sup>gl</sup> performances, analyzing the effect of *PoU* regularity in the quality of approximation. For many practical applications in engineering, a complex structure shows linear elastic behavior over almost all its extension, but exhibits confined plasticity contained in some small critical regions. These kinds of problems are important due the high gradient of deformation field which occurs along the boundary of the process zone, which is difficult to be represented with coarse meshes and conventional functions of FEM. Thus, in addition to the elastic problem, an elastoplastic one with plasticity confined in a small area

of the global domain is also modeled. In this case, the local and global enriched problems are solved with an elastoplastic constitutive model and the computational costs related to nonlinear iterations, compared to the classic GFEM, can be reduced with the use of a coarse mesh in solving the global problem. The irreversible response and hardening effects of the material is represented by the rate independent  $J_2$  plasticity theory with linear isotropic hardening law together with the von Mises yield criteria. Here, it is considered only monotonic loading and the kinematics of small displacements and small deformations and plane strain are assumed. The enrichment adopted in local problem is the uniform polynomial and the penalty method is used in the global-local interface due its simplicity and generality for imposing Cauchy boundary conditions.

Keywords:  $C^K$  generalized finite element method, global-local analysis, elastoplasticity.

# Lista de Figuras

2.1	Discretização de elementos finitos. . . . .	37
2.2	Esquema de enriquecimento da nuvem $\omega_j$ (Fonte: [64]).	51
2.3	Distância $\xi_n(\mathbf{x})$ em nuvem convexa (Fonte: [70]). . . . .	59
2.4	(a) funções de aresta exponenciais, (b) função peso e (c) função $PU$ para uma nuvem convexa. Funções associadas à nuvem de nó vermelho (Fonte: [14]). . . . .	60
2.5	Zona <i>buffer</i> em um domínio local (amarela). A região interior (branca) é a zona de enriquecimento. . . . .	67
2.6	Domínio global e domínio local com uma camada de elementos. . . . .	72
3.1	Curva tensão-deformação para o modelo com encruamento linear. . . . .	80
4.1	Malha utilizada para a solução de referência. . . . .	86
4.2	Malha do problema global, onde a região colorida representa o domínio local (a) sem e (b) com zona <i>buffer</i> . Os círculos pretos indicam os nós do problema global enriquecidos com função global-local. . . . .	87
4.3	(a) Malha MA1 sem zona <i>buffer</i> e (b) Malha MA2 com zona <i>buffer</i> , em que a zona <i>buffer</i> equivale a uma camada de elementos da malha global grosseira (ver Figura 4.2). . . . .	88

4.4	(a) Malha MB1 sem zona <i>buffer</i> e (b) Malha MB2 com zona <i>buffer</i> , em que a zona <i>buffer</i> equivale a uma camada de elementos da malha global grosseira (ver Figura 4.2).	88
4.5	(a) Malha MC1 sem zona <i>buffer</i> e (b) Malha MC2 com zona <i>buffer</i> , em que a zona <i>buffer</i> equivale a uma camada de elementos da malha global grosseira (ver Figura 4.2).	89
4.6	Malha geométrica utilizada nas malhas MB, MC e de Referência. . . . .	89
4.7	Domínio formato L. Dimensões do problema e propriedades do material. . . . .	92
4.8	Erro relativo no cálculo da energia de deformação, para a malha MA (MA1: sem zona <i>buffer</i> ; MA2 com zona <i>buffer</i> ). . . . .	93
4.9	Erro relativo no cálculo da energia de deformação, para a malha MB (MB1: sem zona <i>buffer</i> ; MB2 com zona <i>buffer</i> ). . . . .	94
4.10	Erro relativo no cálculo da energia de deformação, para a malha MC (MC1: sem zona <i>buffer</i> ; MC2 com zona <i>buffer</i> ). . . . .	94
4.11	(a) Elementos da malha global em destaque: i) vermelhos: 1 e 2; ii) amarelos: 3 e 4; iii) verdes: 5 e 6. (b) Malha local MC1 aninhada à malha global. . . . .	99
4.12	Erro relativo no cálculo da energia de deformação total do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . . . . .	100
4.13	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da primeira camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . . . . .	100
4.14	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da segunda camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . . . . .	101

4.15	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da terceira camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . . . . .	101
4.16	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da quarta camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1e MC1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . . . . .	102
4.17	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da quinta camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . . . . .	102
4.18	Erro relativo na norma L2 do deslocamento na interface global-local do PGE para $b = 1, 2$ e $3$ . . . . .	104
4.19	Valores de tensão equivalente sobre a linha AB do PGE para a malha local MA1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ : a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3. . . . .	104
4.20	Valores de tensão equivalente sobre a linha AB do PG para a malha local MC1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ : a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3. . . . .	105
4.21	Tensão equivalente (MPa) para grau local $b = 1$ e malha local MA1: a) PGI; b) PGE com o MEFG <sup>gl-C0</sup> ; c) PGE com o MEFG <sup>gl-Ck</sup> . . . . .	107
4.22	Tensão equivalente (MPa) para grau local $b = 1$ e malha local MC1: a) PGI; b) PGE com o MEFG <sup>gl-C0</sup> ; c) PGE com o MEFG <sup>gl-Ck</sup> . . . . .	108
4.23	Erro relativo no cálculo da energia de deformação total do PGE, para a malha local MC1 e grau $b = 1, 2$ e $3$ para o PL e o PGE. . . . .	109
4.24	Erro relativo no cálculo da energia de deformação, para as malhas locais MC1 (sem zona <i>buffer</i> ) e MC2 (com zona <i>buffer</i> ). Análise elastoplástica. . . . .	111
4.25	Erro relativo no cálculo da energia de deformação total do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . Problema elastoplástico. . . . .	114

4.26	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da primeira camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . Problema elastoplástico. . . . .	115
4.27	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da segunda camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . Problema elastoplástico. . . . .	115
4.28	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da terceira camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . Problema elastoplástico. . . . .	116
4.29	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da quarta camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . Problema elastoplástico. . . . .	116
4.30	Erro relativo no cálculo da energia de deformação da quinta camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . Problema elastoplástico. . . . .	117
4.31	Erro relativo na norma L2 do deslocamento na interface global-local do PGE. Problema elastoplástico. . . . .	119
4.32	Valores de tensão equivalente sobre a linha AB do PG para a malha local MC1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . Análises a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3. . . . .	121
4.33	Valores de tensão equivalente sobre a linha AB do PG para a malha local MC2 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . Análises a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3. . . . .	122
4.34	Valores pontuais de tensão equivalente para os oito passos de carga, com $b$ local igual a: a) 1; b) 2; c) 3. . . . .	124
4.35	Pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento para grau local $b = 1$ e malha local MC1: a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3. . .	126

4.36	Pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento para grau local $b = 2$ e malha local MC1: a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3. . .	127
4.37	Pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento para grau local $b = 3$ e malha local MC1: a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3. . .	128
4.38	Solução de referência: pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento. . .	129
4.39	Pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento para grau local $b = 1$ e malha local MA1: a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3. . .	130
A.1	Domínio trincado. . . . .	153
A.2	Enriquecimento local. Os nós circulados são enriquecidos com a função salto (formam o conjunto $J$ ) e os nós enquadrados com funções assintóticas (formam os conjuntos $K_1$ , associado ao nó 1, e $K_2$ , associado ao nó 2). . .	155
A.3	Funções de enriquecimento $F_l(\mathbf{x})$ , $l = 1, 2, 3, 4$ , para a ponta da trinca para materiais frágeis no contexto da MFEL: (a) $F_1(\mathbf{x})$ ; (b) $F_2(\mathbf{x})$ ; (c) $F_3(\mathbf{x})$ e (d) $F_4(\mathbf{x})$ . (Fonte: [45]). . . . .	156
A.4	Subconjunto nodal $N^*$ ; (a) mostra os elementos reprodutores e de transição como uma consequência da escolha de $N^*$ ; (b) mostra que as funções $\varphi_j$ são uma $PU$ nos elementos reprodutores, mas $\sum_{j \in N^*} \varphi_j \neq 1$ nos elementos de transição. . . . .	157





# Lista de Tabelas

4.1	Resultados referentes à malha MA1: número de graus de liberdade (NGL) e valores de energia de deformação total (U) e da primeira camada de elementos (L1) . . .	96
4.2	Resultados referentes à malha MC1: número de graus de liberdade (NGL) e valores de energia de deformação total (U) e da primeira camada de elementos (L1) . . .	97
4.3	Resultados referentes à malha MC1: valores de energia de deformação da primeira camada de elementos, grau local $b = 1$ . . . . .	98
4.4	Valores de deslocamentos na direção $y$ (mm) do ponto C da malha global e erro relativo (entre parênteses) referentes ao PGE. . . . .	107
4.5	Resultados referentes à malha MC1 do problema elasto-plástico: número de graus de liberdade (NGL) e valores de energia de deformação total (U) e da primeira camada de elementos (L1) . . . . .	112
4.6	Resultados referentes à malha MC2 do problema elasto-plástico: número de graus de liberdade (NGL) e valores de energia de deformação total (U) e da primeira camada de elementos (L1) . . . . .	113
4.7	Resultados referentes à malha MC1 do problema elasto-plástico: valores de energia de deformação da primeira camada de elementos, grau local $b = 1$ . . . . .	118

4.8	Resultados referentes à malha MC2 do problema elasto-plástico: valores de energia de deformação da primeira camada de elementos, grau local $b = 1$ . . . . .	119
4.9	Número de iterações requerido em cada passo de carga para a malha MC1 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . . . . .	120
4.10	Número de iterações requerido em cada passo de carga para a malha MC2 e grau local $b = 1, 2$ e $3$ . . . . .	123
4.11	Valores de deslocamentos na direção $y$ (mm) do ponto C e erro relativo (entre parênteses) referentes ao PGE. Problema elastoplástico. . . . .	125

# Lista de Símbolos

## Alfabeto grego

$\alpha$	Variável interna de encruamento isotrópico
$\gamma$	Parâmetro de consistência associado à plastificação
$\Gamma, \Gamma_G, \Gamma_L$	Contorno do domínio, global, local
$\Gamma_D, \Gamma_N$	Contorno do domínio com condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações
$\boldsymbol{\varepsilon}^e, \varepsilon_{ij}^e$	Parcela elástica do tensor de deformações
$\varepsilon_v^e$	Componente volumétrica da deformação elástica
$\boldsymbol{\varepsilon}^p, \varepsilon_{ij}^p$	Parcela plástica do tensor de deformações
$\varepsilon_{ac}^p$	Deformação plástica acumulada
$\varepsilon_{j,n}$	Funções de aresta
$\eta$	Parâmetro de penalidade
$\kappa$	Parâmetro de rigidez de Cauchy
$\mu$	Constante de Lamé
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tensor de tensões de Cauchy
$\sigma_y$	Tensão de limite de escoamento
$\sigma_{eq}$	Tensão equivalente ou tensão de von Mises
$\phi_j$	Função de aproximação associada ao nó $j$
$\Phi$	Matriz de interpolação dos deslocamentos
$\omega_j$	Nuvem associada ao nó $j$
$\Omega, \Omega_G, \Omega_L$	Domínio, domínio global, domínio local
$(\xi, \eta)$	Sistema de coordenadas naturais
$(r, \theta)$	Sistema de coordenadas polares

## Alfabeto latino

<b>b</b>	Vetor de componentes de força de volume
<b>B</b>	Matriz de aproximação das deformações
<b>C</b>	Matriz de elasticidade linear
<b><math>C^{ep}</math></b>	Operador tensorial tangente elastoplástico
<b><math>E</math></b>	Módulo de elasticidade longitudinal
<b><math>f</math></b>	Função de escoamento
<b><math>\mathbf{f}_{ext}</math></b>	Vetor de forças nodais externas
<b><math>\mathbf{f}_{int}</math></b>	Vetor de forças nodais internas
<b><math>h</math></b>	Função que define a direção de $q$
<b><math>H</math></b>	Função Heaviside
<b><math>H'</math></b>	Módulo plástico de encruamento isotrópico
<b>I</b>	Tensor identidade de segunda ordem
<b>II</b>	Tensor identidade simétrico de quarta-ordem
<b>J</b>	Matriz jacobiana de transformação de coordenadas
<b><math>J_2</math></b>	Segundo invariante do tensor deviatórico de tensões
<b>K</b>	Matriz de rigidez
<b><math>K^{ep}</math></b>	Módulo tangente elastoplástico
<b><math>k</math></b>	Módulo volumétrico
<b><math>l_z</math></b>	Espessura do corpo na direção $z$
<b>L</b>	Operador diferencial
<b><math>\mathbf{L}_j</math></b>	Conjunto de funções de enriquecimento local
<b><math>n</math></b>	Expoente de encruamento do material
<b><math>\mathbf{n}</math></b>	Vetor unitário normal à $\Gamma_N$
<b><math>\underline{\mathbf{n}}</math></b>	Vetor de norma unitária que dá a direção do escoamento plástico
<b>N</b>	Vetor de escoamento plástico
<b><math>N</math></b>	Número de nós total do domínio
<b><math>N_j</math></b>	Funções de forma associadas ao nó $j$
<b><math>p</math></b>	Tensão hidrostática
<b>PG, PGI, PGE</b>	Problema global, inicial e enriquecido
<b>PL</b>	Problema local
<b><math>q</math></b>	Variável associada ao encruamento

$\mathbf{R}$	Resíduo de forças
$\mathbf{s}, s_{ij}$	Tensor deviatórico de tensões
$\bar{\mathbf{t}}$	Vetor de trações prescritas
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos
$\mathbf{u}_h$	Aproximação de Galerkin de $\mathbf{u}$
$\underline{\mathbf{u}}$	Vetor de deslocamentos nodais
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor de deslocamentos prescritos
$\mathbf{U}$	Espaço de funções cineticamente admissíveis
$\mathbf{U}_h$	Espaço discretizado das funções de aproximação
$\mathbf{v}$	Vetor de deslocamentos teste
$\mathbf{V}$	Espaço de variações admissíveis
$\mathbf{V}_h$	Espaço discretizado das funções teste
$W_j$	Função peso com suporte compacto associado à nuvem $\omega_j$
$(x, y)$	Sistema de coordenadas cartesianas biortogonal de referência
$(\cdot)_G^0, (\cdot)_G^E, (\cdot)_L$	$(\cdot)$ global inicial, global enriquecido, local

## Operadores

$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$a_{kk}$	Traço de $a$
$\partial_a(\cdot)$	Derivada parcial de $(\cdot)$ com relação a $a$
$\det(\cdot)$	Determinante de $(\cdot)$
$\text{dev}(\cdot)$	Deviatórico de $(\cdot)$
$\text{tr}(\cdot)$	Traço de $(\cdot)$
$\ (\cdot)\ $	Norma Euclidiana de um vetor ou tensor $(\cdot)$
$\dot{(\cdot)}$	Taxa de $(\cdot)$
$(\cdot)^{-1}$	Inversa de $(\cdot)$
$(\cdot)_n$	Incremento atual de $(\cdot)$
$(\cdot)_{n+1}$	Próximo incremento de $(\cdot)$
$(\cdot)^T$	Transposto de $(\cdot)$
$(\cdot)^{teste}$	Preditor elástico

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução e motivação</b> .....	<b>25</b>
1.1	Estrutura do trabalho.....	29
<b>2</b>	<b>Método dos elementos finitos generalizados</b> .....	<b>31</b>
2.1	Revisão bibliográfica .....	31
2.2	O método dos elementos finitos.....	32
2.2.1	Análise linear via método dos elementos finitos .....	32
2.2.2	Análise elastoplástica através do método dos elementos finitos .....	46
2.3	O método dos elementos finitos generalizados.....	48
2.4	Funções arbitrariamente contínuas: O MEF $G-C^k$ .....	54
2.4.1	Partição da unidade de Shepard .....	56
2.4.2	Funções peso.....	57
2.5	O método dos elementos finitos generalizados global-local: MEF $G^{gl}$ .....	62
2.5.1	Formulação do problema global inicial .....	68
2.5.2	Formulação dos problemas locais.....	69
2.5.3	Funções de enriquecimento global-local e problema global enriquecido .....	72
2.5.4	Solução do problema global enriquecido (elasticidade) ..	74
2.5.5	MEF $G^{gl}$ para problemas não lineares.....	75
2.5.6	Integração numérica das funções de enriquecimento global-local .....	77

<b>3</b>	<b>Plasticidade bidimensional .....</b>	<b>79</b>
3.1	Plasticidade para estado plano de deformações e axissimétrico .....	80
3.1.1	Algoritmo de integração e mapeamento de retorno.....	82
<b>4</b>	<b>Resultados numéricos.....</b>	<b>85</b>
4.1	Domínio formato L: Análise elástica.....	91
4.2	Domínio formato L: Análise elastoplástica .....	110
<b>5</b>	<b>Considerações finais .....</b>	<b>133</b>
5.1	Sugestões para trabalhos futuros .....	135
	<b>Referências.....</b>	<b>139</b>
	<b>Apêndice A - Descontinuidade em MEFG: trincas .....</b>	<b>151</b>
A.1	Descontinuidade elastoplástica.....	157
	<b>Apêndice B - Plasticidade para estado plano de tensões.....</b>	<b>161</b>
B.1	Algoritmo de integração e mapeamento de retorno.....	163

# Capítulo 1

## Introdução e motivação

A modelagem de certas características locais, como altos gradientes, singularidades e descontinuidades, pode ser bem sucedida com a utilização do método de elementos finitos generalizados (MEFG) convencional. Neste método são utilizadas funções enriquecedoras analíticas atreladas a pontos nodais do domínio, visando melhorar a qualidade da aproximação no entorno destes pontos. Para simular efeitos de trincas, por exemplo, podem ser usadas funções descontínuas e singulares, com a utilização de malhas relativamente grosseiras.

Estudos demonstram que o MEFG tem sido utilizado com sucesso na mecânica da fratura elástica linear (MFEL) [1, 2, 3], porém, uma estrutura real é um corpo bastante complexo, com estados de tensões cujos valores baseados na elasticidade linear podem exceder os limites elásticos [4]. Neste contexto, a teoria da plasticidade representa uma extensão necessária da teoria da elasticidade. No entanto, mesmo que as funções enriquecedoras do MEFG sejam capazes de aproximar bem a solução, como é o caso de muitos problemas de mecânica da fratura bidimensional, não é fácil construir funções de enriquecimento analiticamente com boas propriedades de aproximação em classes de problemas que envolvam não linearidade do material. Contudo, esta limitação pode ser contornada usando-se funções de enriquecimento que são construídas numericamente.



Com o intuito de construir funções de enriquecimento numericamente, foi desenvolvido o método dos elementos finitos generalizados global-local (MEFG<sup>gl</sup>), que combina o método dos elementos finitos global-local clássico (técnica "zooming"[5]) com a estrutura da partição da unidade. Estas funções são geradas a partir da solução de problemas locais de valor de contorno na vizinhança de características locais. Então, o método proposto não depende de soluções analíticas. Esta abordagem é composta por três etapas: (i) solução do problema global inicial, de onde são extraídas as condições de contorno para os problemas locais; (ii) solução de problemas locais, onde são construídas as funções de enriquecimento para o problema global e (iii) solução do problema global enriquecido com as soluções dos problemas locais. Em geral, no problema global inicial são usadas funções polinomiais e os problemas locais são resolvidos com o MEFG-*hp*. De acordo com [6], o MEFG<sup>gl</sup> pode ser potencialmente mais eficiente do que o método dos elementos finitos (MEF ou MEFG) padrão, considerando que o custo computacional de resolver um sistema linear cresce bastante rápido com relação ao tamanho do problema.

Em muitas aplicações práticas de engenharia é comum analisar estruturas complexas que mostram, ao longo de grandes extensões, um comportamento elástico linear, mas que exibem plasticidade confinada em algumas pequenas regiões críticas. O trabalho de [7] demonstra a robustez, precisão e eficiência computacional do MEFG<sup>gl</sup> para um problema que apresenta não linearidade localizada, baseado na teoria da plasticidade  $J_2$  com encruamento isotrópico linear, e mostra que o método pode fornecer soluções tão precisas quanto as obtidas pelo MEFG clássico, apesar da malha mais grosseira e do uso da lei elástica do material no problema global inicial. Segundo [8], esta abordagem pode produzir soluções não lineares precisas com um custo computacional reduzido quando comparado ao MEF padrão.

De acordo com [9], as funções *PU* seccionalmente polinomiais utilizadas no MEFG convencional podem não ser as mais adequadas para alguns tipos de problemas que envolvam, por exemplo, enriquecimen-

tos singulares. Além disso, em problemas envolvendo trincas, dano e plasticidade, por exemplo, a obtenção de campos de tensões mais precisos é algo bastante vantajoso. Neste contexto, o MEFG- $C^k$  apresenta uma característica bem atraente, que é a alta regularidade da aproximação. Este método é bastante similar ao MEFG clássico (MEFG- $C^0$ ), exceto pela partição da unidade ( $PU$ ) que é arbitrariamente suave, gerando campos de tensões (ou velocidades) arbitrariamente diferenciáveis, o que não é possível com o MEFG- $C^0$  devido à descontinuidade das derivadas normais ao longo das arestas dos elementos. Esta versão suave do MEFG é uma metodologia de discretização baseada em malha que reúne maior regularidade, propriedade de *flat-top*, coordenadas definidas globalmente, suporte compacto e nenhuma restrição em relação à forma de elementos ou das nuvens.

A importância do MEFG- $C^k$  também está associada à eficiência que apresenta em problemas de alta ordem, como as placas de Kirchhoff e de Reddy, que requerem soluções de continuidade ao menos  $C^1$ . Algumas aproximações  $C^1$  aplicadas a problemas que requerem tal regularidade, como as funções Hermitianas comumente usadas em problemas de placas, por exemplo, são muito restritivas e não favorecem um procedimento sistemático para a construção destas funções em elementos de qualquer forma ou para permitir refino  $p$ . Os trabalhos de [10, 11, 12] apresentam abordagens que exploram benefícios das aproximações MEFG- $C^k$  em problemas de placas.

De acordo com [13], a regularidade  $k$  melhora o desempenho da aproximação de maneira análoga aos refinamentos  $h$  e  $p$ ; e segundo [14], as funções  $PU$   $C^\infty$  permitem melhores aproximações do campo de tensões ao redor da ponta da trinca, quando esta é modelada através de enriquecimento, e melhores taxas de convergência nas versões  $h$  e  $p$ . Os estudos de [15] apontam que para o problema de formato L estudado, com enriquecimento polinomial uniforme, o MEFG- $C^k$  aproxima melhor a região do contorno plástico e os valores de tensões equivalentes, principalmente na vizinhança do vértice reentrante, quando comparado ao MEFG- $C^0$ . Além disso, constatou-se que a  $PU$  arbitrariamente

suave detecta o encruamento do material para um nível de carregamento menor, quando comparada à  $PU$  seccionalmente contínua, sugerindo que a  $PU C^k$  seja mais apropriada para a determinação do nível de carga que causa o escoamento plástico na estrutura, em torno de pontos críticos.

Neste contexto, o presente trabalho propõe uma abordagem que acople o  $MEFG^{gl}$  e o  $MEFG-C^k$ , a fim de comparar seu desempenho com o  $MEFG^{gl}$  clássico na modelagem de problemas bidimensionais que contemplem concentração de tensões (domínio em formato L). Desta forma, pretende-se analisar o efeito da regularidade da  $PU$  no desempenho das aproximações. O método proposto é chamado  $MEFG^{gl-C^k}$  e sua formulação utiliza funções  $PU C^k$  no problema local, construídas através da  $PU$  de Shepard, e funções  $PU C^0$  nos problemas globais inicial e enriquecido. Assim, pode-se usar a habilidade das funções de aproximação com continuidade interelementar  $C^k$  para construir campos de tensões contínuos.

Os estudos compreendem problemas bidimensionais lineares elásticos e elastoplásticos com plasticidade confinada em pequenas regiões do domínio global. Estes tipos de problemas são importantes devido ao alto gradiente do campo de deformações que ocorre ao longo do contorno da zona de processo, que é difícil de representar com malhas grosseiras e funções convencionais do MEF padrão. Nas análises somente a solução local é usada como enriquecimento no problema global. O enriquecimento adotado no problema local é o polinomial uniforme, assim como foi realizado por [8] ao estudar um problema elastoplástico tridimensional em formato L, obtendo bons resultados.

Para representar a resposta irreversível e efeitos de encruamento do material, é considerado o modelo clássico de plasticidade independente de taxa, baseado na teoria da plasticidade  $J_2$  e adequado para análise bidimensional. As principais características do modelo adotado são: função de escoamento de von Mises, encruamento isotrópico linear do material e a hipótese de associatividade suposta para a lei do encruamento e regra da normalidade para o escoamento plástico. É

---

utilizado carregamento monotônico e a cinemática de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, considerando-se estado plano de deformações. Nas interfaces entre o problema global e local utiliza-se o método da penalidade, devido à sua simplicidade e generalidade para impor condições de contorno de Cauchy, com a vantagem de não levar a equações ou incógnitas extras.

## 1.1 Estrutura do trabalho

O presente trabalho é estruturado da seguinte maneira:

O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre o método dos elementos finitos (MEF), mencionando sua primeira generalização, o método da partição da unidade (MPU), e alguns dos principais métodos livres ou não de malhas, cujo MPU serviu de base. Nas seções do capítulo, além dos conceitos e definições do MEF e MEEG clássicos, são apresentados outros dois métodos usados no trabalho, o MEEG- $C^k$  e o MEEG $^{gl}$ . O estudo também contempla a análise linear elástica e elastoplástica usadas nestes métodos.

O Capítulo 3 trata sobre a Teoria da Plasticidade, realizando uma revisão bibliográfica onde são apresentados conceitos e formulações da plasticidade bidimensional.

No Capítulo 4 os experimentos numéricos são descritos e seus resultados são apresentados e discutidos, visando comparar os desempenhos do MEEG $^{gl-C^0}$  e MEEG $^{gl-C^k}$ . Tais problemas são análises bidimensionais lineares elásticas e elastoplásticas que apresentam concentração de tensões (domínio formato L).

O Capítulo 5 apresenta as conclusões sobre os experimentos numéricos estudados, além de sugestões para trabalhos futuros.



## Capítulo 2

# Método dos elementos finitos generalizados

Neste capítulo é feita uma revisão bibliográfica das principais características do MEF clássico e do MEFG, abordando o MEFG convencional, o MEFG com funções de aproximação contínuas (MEFG- $C^k$ ) e o MEFG global-local (MEFG $^{gl}$ ).

### 2.1 Revisão bibliográfica

O método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica para a solução numérica de uma variedade de problemas de meio contínuo encontrados na engenharia. Ele é um método numérico geral para a solução de sistemas de equações diferenciais parciais, sujeitas a conhecidas condições iniciais e de contorno.

Segundo [16], considerando-se o MEF como a aplicação de princípios variacionais e aproximação por funções seccionalmente suaves, a ideia foi usada por Leibnitz em 1696, em análise unidimensional com funções seccionalmente lineares. No entanto, o potencial do método para o uso do computador foi demonstrado por [17].

O MEF usualmente emprega aproximação de base polinomial, cujo resultado é potencializado por suas versões  $h$ ,  $p$  e  $hp$ , sendo esta combi-

nação sugerida e implementada por B.A. Szabó na década de 70. Estas versões concentram-se especialmente na análise mecânica estrutural e representam um refino da malha e/ou da base de funções polinomiais.

Embora o MEF se apresente eficaz em vários problemas de soluções suaves, usando tipicamente espaços de aproximações formados por funções seccionalmente diferenciáveis, ele pode não ser viável em problemas contendo descontinuidades ou singularidades, pois requer um refino significativo [18]. Esta deficiência é agravada nos casos em que tais características dos campos a serem aproximados não possuem posição fixa no domínio, como em simulações de evolução de trincas, exigindo a construção de sucessivas malhas de elementos.

De acordo com [19], pequenas microtrincas não podem ser modeladas por uma malha global projetada para capturar macrotrincas. Assim, para lidar com este problema, o MEF requer refinamentos locais extremos em torno da frente da macrotrinca e em regiões onde as microtrincas são localizadas, o que conduz a um alto custo computacional, especialmente no caso tridimensional.

Além dos inconvenientes citados acima, [20] também aponta a necessidade de alteração na malha de elementos na simulação de grandes deformações, buscando não comprometer a qualidade da solução pela presença de elementos excessivamente distorcidos. Em [21] também é mencionada a dificuldade do método para gerar malhas computacionalmente eficientes em problemas de domínios complexos, ou para incorporar uma informação conhecida a priori sobre a solução do problema.

Tais desvantagens apresentadas pelo MEF motivaram o desenvolvimento de métodos livres de malhas (*meshfree*), cuja aproximação do campo de variáveis é construída em termos de nós, sem definir uma conectividade entre eles. Assim, a aproximação global num ponto do domínio é definida por meio de funções associadas aos nós que pertençam à mesma região de influência (nuvem) do ponto em questão, sem o auxílio de uma malha. No entanto, para a integração numérica faz-se necessária uma partição do domínio.

Segundo [22], devido à flexibilidade na construção de funções de forma conformes que atendam às necessidades específicas para diferentes aplicações, tem sido relatado que os métodos sem malha são particularmente adequados para problemas com simulação de propagação de trincas, grandes deformações, concentração de tensões, entre outros. Esta facilidade em modelar com os métodos sem malha é devido à utilização de funções de enriquecimento próprias para cada situação. Desta forma, é possível enriquecer a aproximação apenas numa região local do domínio, sem comprometer a conformidade da aproximação. O refino  $p$  também é facilitado, bastando acrescentar novos parâmetros aos nós existentes, diferente do MEF que precisa criar nós nas arestas ou no interior dos elementos.

No entanto, o MEF padrão produz coeficientes cujos valores são iguais aos da função aproximadora no nó, por isso são chamados valores nodais, uma propriedade de interpolação que os métodos livres de malhas não possuem. Mas, de acordo com [23], esta deficiência é controlada quando se recupera a interpretação física da solução do deslocamento resultante.

Uma das primeiras generalizações do MEF é o chamado método da Partição da Unidade (MPU) [24, 25, 26], que difere do primeiro porque assegura a conformidade da solução por meio de uma partição da unidade ( $PU$ ), que é um conjunto de funções cuja soma dos valores em cada ponto de um domínio é a unidade (ver Seção 2.3). Além disso, o MPU usa funções de enriquecimento para melhorar aproximações locais, que equivale ao refino  $p$  do MEF, quando as funções enriquecedoras são polinomiais. E o refino  $h$  do MEF é equivalente à redução do suporte da nuvem no MPU. Nestes métodos, espaços locais são construídos com base em um conhecimento a priori sobre a solução do problema.

Outros métodos foram desenvolvidos a fim de superar dificuldades relacionadas ao MEF, dentre elas a adaptação de malhas. A seguir, são apresentados alguns destes métodos (livres ou não de malhas), cuja visão geral e aplicações também podem ser encontrados, por exemplo,



em [27, 28].

a) Método das diferenças finitas (MDF): é um método baseado em malha que possibilita análises com grades arbitrárias, ou seja, com disposição irregular de nós. A formulação e aplicações do método podem ser encontradas em [29, 30, 31, 32, 33].

b) Método de nuvens  $hp$ : é um método sem malha que surge a partir dos trabalhos de [34, 35], e recebe este nome pela facilidade que tem em lidar com as versões  $h$  e  $p$ . Neste método, o enriquecimento é realizado sobre as funções  $PU$ , adicionando-se novos parâmetros aos nós existentes, sem a necessidade de aumentar o número de pontos nodais no domínio. Além disso, as funções de enriquecimento são definidas em coordenadas globais, o que contribui para a eficiência do método. A fim de gerar menos graus de liberdade e exigir menos esforço computacional, pode-se usar funções  $PU$  de baixa ordem, levando a um número menor de nós no domínio. Aqui, a região de influência (nuvem) de um nó é definida como uma região circular (ou poligonal) em torno do mesmo. Mais detalhes sobre o método e suas aplicações podem ser encontradas em [34, 35, 36].

c) Método dos elementos finitos generalizados (MEFG): este método teve suas origens nos trabalhos de [37, 38, 39, 40]. Ele é um método híbrido que apresenta características tanto do MEF, quanto do método das nuvens  $hp$  e sua proposta é usar a própria malha de elementos finitos para definir as nuvens dos nós. Neste caso, a região de influência de um nó (nuvem) é composta pelos elementos que têm aquele nó como vértice. As funções de forma do MEF são usadas para definir as nuvens e as funções  $PU$  e assim reduzir o custo computacional em relação ao método das nuvens  $hp$  e demais métodos sem malha. Uma das vantagens do método é sua precisão, mesmo sob grandes distorções de malha, já que o enriquecimento é feito sobre as coordenadas globais após mapeamento. Habitualmente, o enriquecimento utilizado é o polinomial, mas podem ser usadas funções especiais para a obtenção de melhores aproximações, tais como funções que representam a solução exata do problema, sendo feito de forma análoga ao método das nuvens

*hp*. Os trabalhos de [37, 38] utilizam o enriquecimento polinomial em análises lineares de estruturas tridimensionais complexas, com malhas menos refinadas, reduzindo significativamente o erro na aproximação. Os problemas analisados apresentam pontos de singularidade quanto à concentração de tensões em cantos reentrantes do domínio. Segundo [37], a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  gerada pelo MEFG tem grau de esparsidade menor (mais termos não nulos) do que as geradas pelo MEF convencional. No entanto, a menor dimensão de  $\mathbf{K}$  no MEFG compensa esta desvantagem, quando comparado com o MEF (para a mesma malha e mesma ordem de aproximação), fazendo com que o tempo de solução do sistema seja menor quando se utiliza o MEFG. Mais detalhes sobre o método e suas aplicações podem ser vistos em [41, 42, 43].

d) Método de elementos finitos estendido (MEFE): esta técnica é utilizada em problemas de fratura e utiliza funções de enriquecimento que simulam descontinuidade no campo de deslocamentos dentro de um mesmo elemento, sem a necessidade de refino de malha. Assim, esta abordagem possibilita descrever e simular o crescimento de trincas, cuja representação independe da malha de elementos. Desta forma, sua vantagem é poder representar descontinuidades arbitrárias, independentemente da discretização de EF. Isto representa um generoso ganho na qualidade da resposta, quando comparada à aproximação de base polinomial usualmente empregada no MEF. Este método é o mesmo que o MEFG, conforme mostrado nos artigos [44, 45], podendo-se obter mais detalhes e aplicações em [3, 46, 47, 48, 49, 50].

Uma das principais desvantagens dos métodos sem malha é o alto custo computacional em algumas aplicações, devido à elevada quantidade de pontos de integração utilizados para integrar as funções e seus produtos ao longo do domínio computacional. De acordo com [22], outra dificuldade das aproximações sem malhas é a sua aplicação em estruturas computacionais de elementos finitos existentes. A construção de funções de forma livres de malhas geralmente requer busca por nós vizinhos, um cuidado especial com a quadratura numérica, além de outros requisitos que normalmente não são atendidos por códigos de

elementos finitos tradicionais.

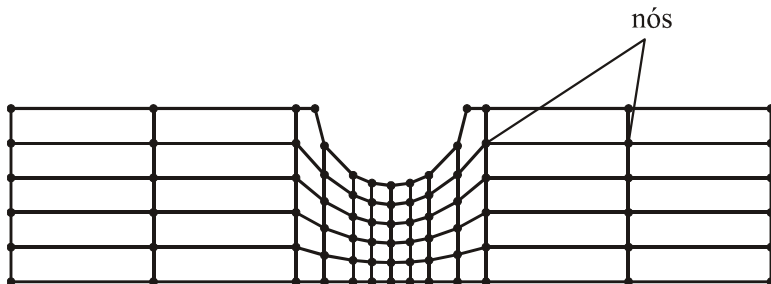
Uma abordagem para reduzir o custo computacional de métodos livres de malhas é utilizá-los apenas em partes do domínio onde são estritamente necessários e no restante do domínio utilizar uma discretização de elementos finitos [51, 52].

Para reduzir o custo de integração numérica das funções de forma sem malha, e ao mesmo tempo reduzir as dificuldades de implementação dos métodos sem malhas e ainda conseguir base de aproximação suave, pode-se usar um procedimento proposto por Edwards [53]. Nesta abordagem, uma malha de elementos finitos é usada para construir funções de forma arbitrariamente suaves com o mesmo suporte das correspondentes funções de forma Lagrangeanas de elementos finitos, definidas numa mesma malha. Este método é bastante similar ao MEFG- $C^0$ , exceto que a  $PU$  é arbitrariamente suave, sendo chamado de MEFG- $C^k$ . Sua importância também está associada à eficiência que apresenta em problemas de alta ordem. Maiores detalhes sobre o método podem ser encontrados na Seção 2.4.

Embora os métodos baseados no MPU sejam eficazes na solução de problemas com características de interesse localizadas, eles dependem de funções de enriquecimento de forma fechada que nem sempre estão disponíveis [54]. Isto levou ao desenvolvimento do método dos elementos finitos generalizados com enriquecimento global-local (MEFG $^{gl}$ ) [6, 7, 8, 19, 54, 55], que combina o método dos elementos finitos global-local clássico, com o MPU. Desta forma, este método usa funções de enriquecimento construídas numericamente. A Seção 2.5 apresenta mais detalhes sobre o método.

## 2.2 O método dos elementos finitos

O MEF é um método de análise em que um campo de variáveis é aproximado pela combinação linear de *funções de forma*, definidas em uma pequena região chamada *elemento finito*, que é um dos subdomínios no qual o domínio do problema é particionado [56]. O MEF



**Figura 2.1:** Discretização de elementos finitos.

propõe uma aproximação da solução do problema de valor de contorno, que pode ser melhorada usando-se mais elementos para representar a estrutura e/ou aumentando-se o grau das funções no elemento. Neste método, os elementos são conectados por pontos chamados *nós* e uma união particular de elementos é denominada *malha* (Figura 2.1).

Numericamente, a discretização do modelo de elementos finitos é representada por um sistema de equações algébricas em termos das aproximações dos valores nodais, que são desconhecidas, mas a serem determinadas. Neste sistema de equações, o vetor independente é chamado vetor de forças nodais equivalentes e a matriz de coeficientes é denominada matriz de rigidez. O vetor de forças nodais equivalentes pode ser composto por deslocamentos ou outras variáveis primais, como temperatura, ou ainda esforços, tensões, pressão, dentre outros. Assim, após a introdução das condições de vinculação ao meio exterior, a solução do sistema global determina os valores nodais.

### 2.2.1 Análise linear via método dos elementos finitos

O desenvolvimento descrito nesta seção é convencional e pode ser encontrado com detalhes em várias fontes como [4, 24, 57, 58].

A seguir, é apresentado um problema plano de elasticidade que ilustra o método.

## Formulação Forte

Seja um problema de valor de contorno (PVC) de elasticidade linear definido num domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , cujo corpo na situação de equilíbrio estático satisfaz as equações de equilíbrio no seu interior, dadas na forma forte por<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} L^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{em } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{em } \Gamma_N. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Aqui, a representação matricial é utilizada por ser mais adequada para o processo de obtenção do vetor de forças nodais equivalentes e da matriz de rigidez. Desta forma,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor que contém os componentes do tensor de tensões:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left\{ \begin{matrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{matrix} \right\}, \quad (2.2)$$

$\mathbf{b}$  é o vetor que contém os componentes de força de corpo:

$$\mathbf{b}^T = \left\{ \begin{matrix} b_x & b_y \end{matrix} \right\}, \quad (2.3)$$

$\mathbf{u}$  denota o vetor dos componentes da função deslocamento:

$$\mathbf{u}^T = \left\{ \begin{matrix} u_x & u_y \end{matrix} \right\},$$

$L$  é o operador diferencial expresso por:

$$L^T = \left[ \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{matrix} \right], \quad (2.4)$$

$\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  ( $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ) denotam as partes complementares do contorno  $\Gamma$ , onde as condições de Dirichlet e Neumann são definidas, respectivamente;  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à  $\Gamma_N$  e apontando para o exterior do domínio, sendo chamado aqui de vetor normal externo à

---

<sup>1</sup>O sobrescrito "T" indica transposto de um vetor ou matriz.

$\Gamma_N$ . O vetor  $\bar{\mathbf{u}}$  representa o campo de deslocamentos prescritos e  $\bar{\mathbf{t}}$  é o vetor que contém os componentes das trações prescritas no contorno de Neumann:

$$\bar{\mathbf{t}}^T = \left\{ \bar{t}_x \quad \bar{t}_y \right\}. \quad (2.5)$$

A relação constitutiva elástica linear relaciona as tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  com o deslocamento  $\mathbf{u}$ , da seguinte forma :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (2.6)$$

sendo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  o vetor dos componentes do tensor de deformações:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \right\}, \quad (2.7)$$

que representa a *relação deformação-deslocamento*, dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = L\mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Para pequenos deslocamentos, tem-se  $\varepsilon_x = \partial u_x / \partial x$ ,  $\varepsilon_y = \partial u_y / \partial y$ ,  $\gamma_{xy} = \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x$ . Aqui,  $\mathbf{C}$  é a matriz constitutiva que, para estado plano de tensões, é dada por:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

e para estado plano de deformações,

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

em que  $E$  e  $\nu$  são o módulo elástico e o coeficiente de Poisson, respectivamente. Para o estado plano de deformações tem-se que o componente de tensões  $\sigma_z$  é diferente de zero e pode ser escrito como  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ .

## Formulação Fraca

Problemas lineares podem ser formulados na forma fraca (variacional) onde, diferentemente da formulação forte, com equilíbrio pontual, procura-se estabelecer um equilíbrio global. Neste caso, em relação à regularidade, pode-se trabalhar com espaços de funções menos restritos para encontrar a solução, como espaços de Hilbert de ordem 1 ( $\mathbf{H}^1$ ), cujas funções e suas primeiras derivadas são quadraticamente integráveis no sentido de Lebesgue. Desta forma, a formulação fraca consiste em [26]:

Encontrar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$  tal que:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.11)$$

sendo  $\mathbf{U}$  (espaço das funções cinematicamente admissíveis) e  $\mathbf{V}$  (espaço das variações admissíveis) espaços de Hilbert, dimensionalmente infinitos, com normas  $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$ , o operador  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  é a forma contínua bilinear sobre  $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$  e o operador  $l(\mathbf{v})$  é contínuo e linear. Em muitas aplicações os espaços  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são espaços de Hilbert de ordem 1 ( $\mathbf{H}^1$ ) e são definidos sobre o domínio  $\Omega$ .

Para elasticidade plana, os operadores variacionais são definidos como:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) l_z dx dy \quad (2.12)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} l_z dx dy + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} l_z ds \quad (2.13)$$

em que  $\mathbf{v}^T = \{v_x, v_y\}$  é o vetor dos componentes da função (de deslocamentos) teste e  $l_z$  é a espessura do corpo elástico (na direção  $z$ ) considerado aqui como constante (unitária).

## Formulação discretizada

O MEF, para a solução numérica definida anteriormente, consiste em substituir  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  por subespaços discretos  $\mathbf{U}_h \subset \mathbf{U}$  (espaço de

funções de aproximação) e  $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$  (espaço de funções teste), gerados por uma discretização de elementos finitos  $h$  do domínio. Assim, a aproximação de Galerkin da solução  $\mathbf{u}$  da Equação (2.11) é a função  $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \in \mathbf{U}_h$  tal que [59]:

$$B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (2.14)$$

A aproximação global generalizada para os deslocamentos sobre  $\Omega$ , pode ser escrita como uma combinação linear das funções de forma globais, associadas a cada nó, da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j^G(\mathbf{x}) \begin{Bmatrix} u_{hx}^j \\ u_{hy}^j \end{Bmatrix} \implies \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = (\Phi^G)^T \underline{\mathbf{u}}, \quad (2.15)$$

em que:

$$\underline{\mathbf{u}}^T = \left\{ u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad \dots \quad u_x^N \quad u_y^N \right\}, \quad (2.16)$$

o vetor de deslocamentos dos pontos nodais, o índice  $N$  é igual ao número de nós da malha de elementos finitos e  $\Phi^G$  é a *matriz global de interpolação dos deslocamentos*

$$\Phi^G = \begin{bmatrix} \phi_1^G & 0 & \phi_2^G & 0 & \dots & \dots & \phi_N^G & 0 \\ 0 & \phi_1^G & 0 & \phi_2^G & \dots & \dots & 0 & \phi_N^G \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

que contém as funções interpoladoras globais  $\phi_N^G$  ou funções de forma globais, que são seccionalmente polinomiais, devendo ter continuidade suficiente para que as integrais da forma fraca do problema possam existir.

Substituindo-se as Equações (2.6), (2.8) e (2.15) na Equação (2.14), obtém-se a seguinte equação de governo para a análise de pequenas deformações:



$$\int_{\Omega} [\mathbf{B}^G]^T \mathbf{C} \mathbf{B}^G \underline{\mathbf{u}} \, d\Omega + \left( - \int_{\Omega} [\Phi^G]^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} [\Phi^G]^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \right) = 0, \quad (2.18)$$

sendo  $\mathbf{B}^G$  a *matriz de aproximação das deformações* (para estado plano de tensões e deformações), escrita como:

$$\mathbf{B}^G = L\Phi^G. \quad (2.19)$$

Assim, a Equação (2.18) proporciona um sistema de equações lineares, tendo os valores dos deslocamentos globais como incógnitas, com a forma:

$$\mathbf{K}\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{ext}, \quad (2.20)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a *matriz de rigidez* da estrutura, dada por:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} [\mathbf{B}^G]^T \mathbf{C} \mathbf{B}^G \, d\Omega, \quad (2.21)$$

e  $\mathbf{f}_{ext}$  é o *vetor de forças externas* agindo nos pontos nodais, dado por:

$$\mathbf{f}_{ext} = \int_{\Omega} [\Phi^G]^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} [\Phi^G]^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma. \quad (2.22)$$

No sistema linear global da Equação (2.20) são impostas as condições de contorno estáticas, que são os valores prescritos nas posições correspondentes do vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{u}_h$ . Isto é essencial para que as funções de aproximação pertençam ao espaços  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{U}_h$ .

Conhecidos os deslocamentos nodais de cada elemento, pode-se obter o campo de deformações e de tensões usando-se as Equações (2.8) e (2.6).

Considerando que o domínio é particionado em elementos, pode-se calcular as contribuições de (2.18) para cada elemento separadamente. Desta forma, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  e o vetor de forças externas  $\mathbf{f}_{ext}^{(e)}$  para o domínio elementar  $\Omega^{(e)}$  são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (2.23)$$

e

$$\mathbf{f}_{ext}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \Phi^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N^{(e)}} \Phi^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma, \quad (2.24)$$

sendo que para um elemento genérico  $e$  definido por  $m$  nós,  $\Phi$  é a matriz de interpolação, dada por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & \cdots & \phi_m & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \cdots & \cdots & 0 & \phi_m \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

sendo  $\phi_j$  a função de forma associada ao nó  $j$ . Cada função de forma  $\phi_j$  é definida tal que seu valor seja unitário no nó  $j$  e nulo em qualquer outro nó do elemento.  $\mathbf{B}$  é a matriz elementar de aproximação das deformações (para estado plano de tensões e deformações), escrita como:

$$\mathbf{B} = L\Phi. \quad (2.26)$$

Para a análise axissimétrica de elementos finitos, tem-se as seguintes definições [59]:

Os deslocamentos podem ser expressos como  $\mathbf{u}^T = \{u, w\}$ , em que  $u$  e  $w$  são os deslocamentos nas direções radial,  $r$ , e axial,  $z$ , respectivamente.

As deformações são dadas por  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left\{ \varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz} \right\}$  e, para pequenos deslocamentos, tem-se  $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ ,  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$  e  $\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$ .

A relação tensão deformação é dada como  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ , com  $\boldsymbol{\sigma}^T = \left\{ \sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \right\}$  e para material elástico linear,

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & 0 & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & \nu & 0 \\ 0 & \nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Os vetores de forças de corpo por unidade de volume e de trações prescritas no contorno por unidade de comprimento são dados, respectivamente, por:  $\mathbf{b}^T = \left\{ b_r \quad b_z \right\}$  e  $\bar{\mathbf{t}}^T = \left\{ \bar{t}_r \quad \bar{t}_z \right\}$ .

Um elemento de volume  $d\Omega$  é dado por  $d\Omega = 2\pi r dr dz$  e a matriz elementar de aproximação das deformações é escrita como:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{\phi_i}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} & \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

## Quadratura de Gauss

Na prática, as integrações indicadas nas Equações (2.23) e (2.24) são executadas pela *quadratura de Gauss*, um procedimento de integração numérica que consiste em aproximar a integral de uma função através de um somatório. Este método localiza pontos de integração e designa pesos apropriados, a fim de minimizar o erro da integração quando o integrando é um polinômio geral.

No caso de uma função integrando  $f$  sobre um domínio de integração  $\Omega$ , a quadratura Gaussiana fornece [60]:

$$\int_{\Omega} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i), \quad (2.29)$$

sendo  $n$  o número de pontos de integração,  $\xi_i$  as posições (coordenadas) dos pontos de Gauss no domínio  $\Omega$  e  $w_i$  os fatores de peso correspondentes.

Agora, seja uma função  $g$  definida sobre um domínio elementar  $\Omega^{(e)}$  e seja  $x : \Omega \rightarrow \Omega^{(e)}$  o mapeamento do domínio padrão  $\Omega$  sobre  $\Omega^{(e)}$ . Desta forma, a quadratura de Gauss para a aproximação da integral de  $g$  sobre  $\Omega^{(e)}$  tem a forma:

$$\int_{\Omega^{(e)}} g(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i g(\xi_i) J_i, \quad (2.30)$$

em que  $J_i$  é o determinante do Jacobiano da transformação no ponto  $x$ . Similarmente, define-se a quadratura de Gauss para aproximar integrais sobre o contorno  $\Omega^{(e)}$  de um elemento.

Assim, aplicando a quadratura de Gauss, a matriz de rigidez e o vetor de forças externas para o elemento passam a ser escritos como:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n_d} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_i w_i J_i \quad (2.31)$$

e

$$\mathbf{f}_{ext}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n_d} \Phi_i^T \mathbf{b}_i w_i J_i + \sum_{i=1}^{n_c} \Phi_i^T \bar{\mathbf{t}}_i w_i J_i, \quad (2.32)$$

sendo  $n_d$  e  $n_c$  os pontos de Gauss relativos ao domínio do elemento e seu contorno, respectivamente.

A matriz de rigidez e o vetor de forças externas globais  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{f}_{ext}$  são superpostas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^m \mathbf{K}^{(e)} \quad (2.33)$$

e

$$\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^m \mathbf{f}_{ext}^{(e)}, \quad (2.34)$$

sendo  $m$  o número de elementos da malha de elementos finitos.

O operador  $\mathbf{A}$  implica que cada componente da matriz  $\mathbf{K}$  (ou vetor  $\mathbf{f}_{ext}$ ) global associado a um nó global particular é obtido como a soma das correspondentes contribuições das matrizes  $\mathbf{K}^{(e)}$  (ou vetores  $\mathbf{f}_{ext}^{(e)}$ ) elementares, cujos elementos compartilham aquele nó.

## 2.2.2 Análise elastoplástica através do método dos elementos finitos

Para o caso de análise não linear, um esquema de controle de força aplicada é apresentado como ilustração. No desenvolvimento descrito nesta seção são consideradas as referências [4, 18, 57].

Em análise elastoplástica, por causa da relação não linear entre a tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  e a deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , a Equação (2.18) é uma equação não linear das deformações e, conseqüentemente, dos deslocamentos nodais  $\underline{\mathbf{u}}$ . Sendo assim, faz-se necessário adotar um esquema iterativo para resolver a Equação (2.14) com relação a  $\underline{\mathbf{u}}$ , correspondendo ao conjunto de forças externas dadas. Além disso, como a relação elastoplástica depende da história da deformação, pode ser utilizada uma análise incremental das forças externas para traçar a variação do deslocamento, da deformação e da tensão.

Em uma análise incremental, o carregamento total  $\mathbf{f}_{ext}$  agindo na estrutura é adicionado em incrementos passo a passo. No  $(n + 1)$ -ésimo passo, o carregamento pode ser expresso por:

$$\mathbf{f}_{ext(n+1)} = \mathbf{f}_{ext(n)} + \Delta\mathbf{f}_{ext(n+1)}. \quad (2.35)$$

Assim, correspondendo ao incremento de carga  $\Delta\mathbf{f}_{ext}$ , tem-se os incrementos nos deslocamentos

$$\underline{\mathbf{u}}_{n+1} = \underline{\mathbf{u}}_n + \Delta\underline{\mathbf{u}}_{n+1}. \quad (2.36)$$

Logo, a Equação (2.18) passa a ser escrita como:

$$\mathbf{f}_{int(n+1)} = \mathbf{f}_{ext(n+1)}. \quad (2.37)$$

que representa o equilíbrio da força externa  $\mathbf{f}_{ext}$ , com a força interna  $\mathbf{f}_{int}$ .

### Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um esquema iterativo adotado para a resolução das equações simultâneas não lineares apresentadas pela

Equação (2.37).

Considerando que a tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  é uma função não linear do deslocamento  $\underline{\mathbf{u}}$ , a Equação (2.37) pode ser escrita como o seguinte sistema de forças residuais:

$$\mathbf{R}(\underline{\mathbf{u}}_{n+1}) = \mathbf{f}_{int(n+1)} - \mathbf{f}_{ext(n+1)}, \quad (2.38)$$

sendo  $\mathbf{R}(\underline{\mathbf{u}}_{n+1})$  o resíduo de forças.

Assim, tendo obtida a  $(i-1)$ -ésima aproximação,  ${}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ , para o deslocamento  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ , expandindo  $\mathbf{R}(\underline{\mathbf{u}}_{n+1})$  com a expansão das séries de Taylor e negligenciando os termos de alta ordem, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}({}^{(i)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}) &= \mathbf{R}({}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}) \\ &+ \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{{}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}} ({}^{(i)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1} - {}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

ou, considerando que a força externa não depende do deslocamento:

$$\left[ {}^{(i-1)}\mathbf{f}_{int(n+1)} - \mathbf{f}_{ext(n+1)} \right] + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{{}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}} ({}^{(i)}\Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.40)$$

em que

$${}^{(i-1)}\mathbf{f}_{int(n+1)} = \mathbf{f}_{int(n+1)} \left( ({}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}) \right) \quad (2.41)$$

e

$${}^{(i)}\Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1} = ({}^{(i)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1} - {}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}). \quad (2.42)$$

E, reconhecendo que:

$${}^{(i-1)}\mathbf{K}_{(n+1)} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{{}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{ep}|_{{}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}} \mathbf{B} d\Omega, \quad (2.43)$$

em que  $\mathbf{C}^{ep}|_{{}^{(i-1)}\underline{\mathbf{u}}_{n+1}}$  é o *operador tangente elastoplástico* e  ${}^{(i-1)}\mathbf{K}_{(n+1)}$

é a *matriz tangente de rigidez*, obtém-se o esquema de iteração do algoritmo de Newton-Raphson como:

$${}^{(i-1)}\mathbf{K}_{n+1} {}^{(i)}\Delta\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{R} \left( {}^{(i-1)}\mathbf{u}_{n+1} \right), \quad (2.44)$$

$${}^{(i)}\mathbf{u}_{n+1} = {}^{(i-1)}\mathbf{u}_{n+1} + {}^{(i)}\Delta\mathbf{u}_{n+1}, \quad (2.45)$$

$${}^{(i=0)}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n, \quad {}^{(i=0)}\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{K}_n, \quad {}^{(i=0)}\mathbf{f}_{int(n+1)} = \mathbf{f}_{int(n)}. \quad (2.46)$$

Esta forma permite que a correção do vetor desconhecido  $\mathbf{u}$  seja obtida através do vetor de forças residuais  $\mathbf{R}$  em alguma iteração. Este processo continua até que ocorra a convergência, ou seja, até que a força residual  $\mathbf{R} \left( {}^{(i-1)}\mathbf{u}_{n+1} \right)$  seja suficientemente pequena.

A solução iterativa resultante deste esquema preserva a convergência quadrática numa vizinhança suficientemente próxima à solução, que é característica do método de Newton-Raphson. Isto ocorre desde que o operador tangente elastoplástico seja *consistente* com o algoritmo de integração empregado na solução do problema incremental [61].

## 2.3 O método dos elementos finitos generalizados

O método dos elementos finitos generalizados (MEFG) é uma combinação do MEF padrão com conceitos e técnicas típicas de métodos sem malha. Este método apresenta um aspecto de enriquecimento nodal que pode não requerer o refinamento de malhas, tornando-se muito atrativo em várias análises. No caso de problemas com domínio complexo, apresenta bons resultados com o uso de malhas simples [43]. Sua eficácia tem sido mostrada, por exemplo, em problemas com domínios de contornos de forma complexa [41], em análise de propagação de fraturas [39, 47, 62], em materiais com microtrincas e vazios [63].

O MEFG convencional (MEFG- $C^0$ ) estabelece uma malha que é usada para (a) definir partições da unidade e (b) facilitar a integração numérica. De acordo com [59], seja um domínio  $\Omega \subset R^n$  e sejam os conjuntos abertos  $\{G_j\}_{j=1}^N$ , tais que  $\Omega \subset \cup_{j=1}^N G_j$ , uma  $PU$  é constituída pela classe de funções  $\varphi_j(\mathbf{x})$ , tal que:

- (i)  $\varphi_j(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(G_j)$  (funções de suporte compacto e infinitamente diferenciáveis),
  - (ii)  $\sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) = 1$  e  $\varphi_j(\mathbf{x}) \geq 0$  em  $\Omega$ , e
  - (iii) todo subconjunto compacto de  $\Omega$  intercepta somente um número finito de suportes de  $\varphi_j(\mathbf{x})$ .
- (2.47)

As funções enriquecedoras são vinculadas a nuvens individuais de elementos, em torno de pontos nodais do domínio, visando melhorar a qualidade da aproximação na vizinhança desses pontos. Assim, tem-se a possibilidade de enriquecer a aproximação apenas numa região do domínio do problema, devido ao suporte compacto da  $PU$ , sem refinamento de malha [37, 43, 64]. Além disso, as condições de contorno essenciais podem ser impostas exatamente como no MEF padrão [43].

O conjunto das funções  $PU$  é empregado para garantir a continuidade interelementar, criando conformidade de aproximações que são melhoradas pela estratégia de enriquecimento nodal. Se a partição da unidade usada no MEFG provém das funções de forma de elementos finitos, este método pode ser entendido como uma forma não convencional do MEF [64] e as funções da  $PU$  usadas resultam em uma base seccionalmente polinomial que aproximam bem as funções suaves. Desta forma, para aproximar funções não suaves, são utilizadas funções de enriquecimento, sem a necessidade de refinamento de malha, o que poderia levar a muitos graus de liberdade para atingir uma precisão específica, como no MEF convencional.

Para a construção das funções de aproximação do MEFG, considere-se, por exemplo, uma malha convencional de elementos finitos definida por  $N$  nós com coordenadas  $\{x_j\}_{j=1}^N$ , no domínio  $\Omega$ . Em proble-

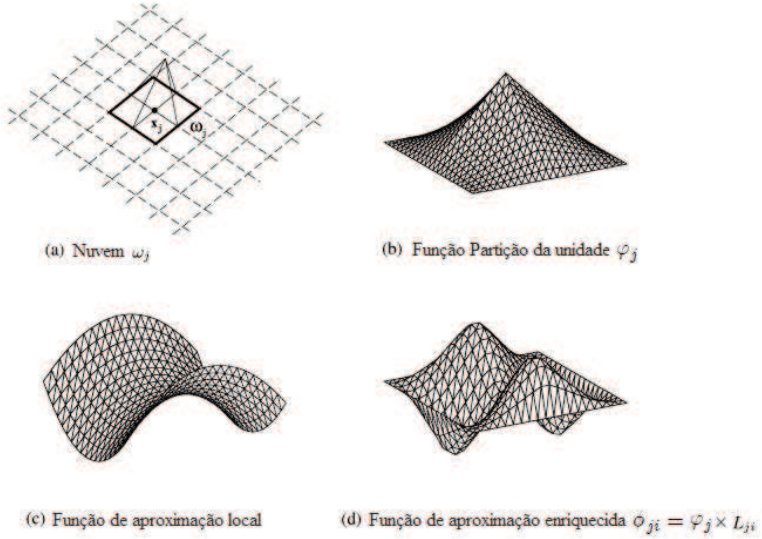


mas planos, por exemplo, os elementos são geralmente triângulos ou quadriláteros de três e quatro nós, respectivamente (e analogamente para malhas tridimensionais). Se o enriquecimento é realizado com relação ao nó  $\mathbf{x}_j$ , uma *nuvem genérica*  $\omega_j \in \Omega$  é definida como a *união dos elementos finitos adjacentes a este nó*. O conjunto das funções de forma pertencentes a cada elemento associado ao nó  $\mathbf{x}_j$ , compõe a função  $\varphi_j$  sobre o suporte da nuvem  $\omega_j$ . Assim, o conjunto das  $\varphi_j$ , associadas a todos os nós do domínio, passa a ser interpretado como uma *PU*. As funções lagrangeanas convencionais de elementos finitos constituem uma classe de *PU*  $C_0^0(\omega_j)$ , onde a primeira condição apresentada na Equação (2.47) é relaxada para  $C_0^k(\omega_j)$ ,  $k = 0$ ; podendo ser usadas no MEFG como apresentado por [64].

As funções de enriquecimento, relacionadas ao nó  $\mathbf{x}_j$ , são denotadas por  $\mathbf{L}_j = \{L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{jq}\} = \{L_{ji}\}_{i=1}^q$  (com  $L_{j1} = 1$ ) e representam um conjunto de  $q$  funções linearmente independentes. Elas podem ser escolhidas como funções polinomiais, harmônicas, anisotrópicas ou mesmo funções que são parte da solução do PVC [26, 38, 65]. Os subespaços de aproximação local são denotados aqui por  $\chi_j(\omega_j) = \text{span}\{L_{ji}\}_{i=0}^q$ . No caso de enriquecimento polinomial uniforme pode-se escolher  $P_p(\omega_j) \subset \chi_j(\omega_j)$ , onde  $P_p$  é o espaço de polinômios de grau menor ou igual a  $p$ . Por exemplo, para  $p = 2$  (base quadrática), o conjunto de funções de enriquecimento é:

$$\mathbf{L}_j = \left\{ 1, \left( \frac{x-x_j}{h_{xj}} \right), \left( \frac{y-y_j}{h_{yj}} \right), \left( \frac{x-x_j}{h_{xj}} \right)^2, \left( \frac{x-x_j}{h_{xj}} \right) \left( \frac{y-y_j}{h_{yj}} \right), \left( \frac{y-y_j}{h_{yj}} \right)^2 \right\},$$

em que  $x_j$  e  $y_j$  são as coordenadas nodais de um nó arbitrário  $\mathbf{x}_j$  e  $h_{xj}$  e  $h_{yj}$  são as dimensões características da nuvem em relação ao nó  $\mathbf{x}_j$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Nestas funções são utilizados translação e escalamento, tentando minimizar a dependência da malha. A translação é feita através de  $x_j$  e  $y_j$ , que contribuem para não haver influência com relação à distância entre os elementos e a origem dos eixos de coordenadas globais. O escalamento é realizado através de  $h_{xj}$



**Figura 2.2:** Esquema de enriquecimento da nuvem  $\omega_j$  (Fonte: [64]).

e  $h_{yj}$ , com o objetivo de equiparar as dimensões de elementos grandes e pequenos.

Assim, as funções de aproximação do MEFMG associadas ao nó  $\mathbf{x}_j$  resultam do enriquecimento da  $PU$ , ou seja, da multiplicação da função  $PU$  com suporte na nuvem  $\omega_j$ , pelos componentes de  $\mathbf{L}_j$ :

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^q = \varphi_j \cdot \{L_{ji}\}_{i=1}^q. \quad (2.48)$$

Isto implica no crescimento do número de incógnitas por nó, em relação ao associado com a  $PU$ .

A função de aproximação resultante  $\phi_{ji}$  contém características de ambas funções, isto é, o suporte compacto da  $PU$  e o caráter de aproximação das funções de enriquecimento  $L_{ji}$ . A Figura 2.2 representa um caso de aproximação definida em  $\mathbb{R}^2$ , para funções  $PU$  (bilineares) do tipo  $C^0$ .

No conjunto de todos os nós, se o enriquecimento e a  $PU$  utilizarem

os mesmos tipos de funções, polinomiais por exemplo, então as funções de aproximação do MEEFG serão linearmente dependentes (LD). Assim, a base enriquecida, sendo linearmente dependente, faz com que a matriz de rigidez do sistema seja positiva semidefinida. Este problema pode ser evitado com uma escolha cuidadosa das funções  $L_{ji}$  [40], ou fazendo restrições na  $PU$  [26], ou resolvendo o sistema eficientemente pelo procedimento iterativo proposto em [37, 38].

A estrutura do MEEFG oferece mais liberdade na escolha de funções de aproximação, quando comparado ao MEF clássico, podendo ser adaptadas para aproximar bem uma solução desconhecida [41]. Além disso, a maneira de incorporar os refinamentos algébricos possibilita variar o enriquecimento ao longo do domínio sem comprometer a conformidade da aproximação, que é assegurada pelo suporte compacto da  $PU$ .

Em problemas cuja solução possui pontos ou linhas de singularidades em algumas partes do domínio, podem-se construir funções de aproximação que representem mais eficientemente estas singularidades do que as funções polinomiais que são usadas no MEF tradicional [37]. Para contornos consistindo de segmentos retos, segmentos de circunferências ou elipses, podem ser construídas famílias de funções especiais que satisfaçam exatamente as condições de contorno a priori [43]. Além disso, para domínios de formas complexas, incluindo trincas ou reentrâncias, pode-se utilizar funções especiais da sequência de uma expansão assintótica que são conhecidas analiticamente ou podem ser calculadas numericamente. Análises envolvendo trincas não são consideradas neste trabalho e mais detalhes sobre descontinuidade no MEEFG podem ser obtidos no Apêndice A.

A aproximação global generalizada para os deslocamentos sobre  $\Omega$ , pode ser escrita como uma combinação linear das funções de aproximação associadas a cada nó, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) \begin{Bmatrix} u_{xj} \\ u_{yj} \end{Bmatrix} + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) \begin{Bmatrix} b_{ji} \\ b'_{ji} \end{Bmatrix} \implies \\ \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

em que  $\mathbf{u}$  é o vetor contendo os parâmetros nodais, sendo  $u_{xj}$  e  $u_{yj}$  associados às funções *PU*  $\varphi_j$  e  $b_{ji}$  e  $b'_{ji}$  associados às funções enriquecidas  $\varphi_j L_{ji}$ . O conjunto completo das funções de aproximação pode ser agrupado na forma vetorial como

$$\mathbf{\Phi}^T = \left\{ \begin{array}{cccc} \{\varphi_1 & L_{12}(\mathbf{x})\varphi_1 & \cdots & L_{1q_j}(\mathbf{x})\varphi_1\} & \cdots \\ & \{\varphi_N & L_{N2}(\mathbf{x})\varphi_N & \cdots & L_{Nq_j}(\mathbf{x})\varphi_N\} \end{array} \right\}$$

A continuidade da função  $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$  sobre o domínio inteiro é garantido pelo suporte compacto da *PU* usada ( $\varphi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  no contorno de  $\omega_j$ ).

De acordo com [41], a implementação do MEFG consiste de quatro partes principais:

(a) a seleção das funções de enriquecimento, que dependem das informações disponíveis com relação à solução do problema;

(b) a seleção das funções da partição da unidade (*PU*), que são funções que satisfazem as condições colocadas nas Equações (2.47);

(c) a construção da matriz de rigidez e escolha das funções *PU* e enriquecimentos associados, de modo que a integração numérica possa ser realizada eficientemente;

(d) a solução do sistema linear, que também é afetado pela escolha das funções *PU* e do enriquecimento, pois dependendo desta escolha as funções de aproximação global do MEFG podem ser linearmente dependentes ou linearmente independentes.

## 2.4 Funções arbitrariamente contínuas: O MEFG- $C^k$

Devido à flexibilidade em construir funções de aproximação conformes, os métodos sem malha são particularmente adequados para problemas de grandes deformações, simulação de propagação de trincas, entre outros. No entanto, uma das principais desvantagens destes métodos é o alto custo computacional em algumas aplicações, pois usa um grande número de pontos de integração para integrar as funções presentes nas integrais de  $\mathbf{K}^{(e)}$  e  $\mathbf{f}_{ext}^{(e)}$  sobre o domínio em análise.

Uma alternativa para amenizar este problema e, ao mesmo tempo, diminuir as dificuldades de implementação dos métodos sem malha é usar uma malha de elementos finitos para construir uma  $PU$  arbitrariamente suave [22, 51], com o mesmo suporte das correspondentes funções de forma de elementos finitos padrão  $C^0$ . A construção de funções regulares baseadas em malhas (versão  $k$ ) foi proposta por Edwards [53] e sua generalização para malhas arbitrárias por [22]. Assim, busca-se usar funções de aproximação com continuidade arbitrária, obtendo-se campos de tensões (ou velocidades) continuamente diferenciáveis.

As funções  $PU$  construídas segundo [22] permitem recuperar a elevada regularidade comum de aproximações por métodos livres de malha, mantendo a malha de elementos para a definição dos suportes das funções. Desta forma, tem-se a possibilidade de se elevar a regularidade sem aumento de suporte.

Estas funções  $PU$  arbitrariamente suaves são chamadas de *partição da unidade*  $C^k$ . Elas podem ser construídas como funções  $C^\infty$ , considerando o procedimento original de Edwards, no caso de nuvens com suporte convexo e funções de aresta exponencial. Nesta abordagem, uma malha de elementos finitos é utilizada para a construção de funções de forma arbitrariamente suaves e de acordo com [53], pode ser utilizada para qualquer tipo e dimensão de elemento finito (triangular, quadrangular, tetraédrico, hexaédrico...), com o mesmo suporte do método dos elementos finitos. Em nuvens com suporte não convexos, as funções  $PU$

podem ser até  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis nos nós côncavos, com  $k$  arbitrariamente grande, e infinitamente diferenciáveis no resto do domínio.

A integração numérica das funções nos integrandos de  $\mathbf{K}^{(e)}$  e  $\mathbf{f}_{ext}^{(e)}$  pode ser eficientemente feita usando a malha de elementos finitos. Neste caso, o método não é mais sem malha, mas são conservadas características atrativas de aproximações sem malha, como alta regularidade da aproximação e a propriedade da partição da unidade.

Este método é bastante similar ao MEFG- $C^0$ , exceto que a  $PU$  é arbitrariamente suave, sendo chamado de MEFG- $C^k$  (continuidade arbitrária). Sua importância também está associada à eficiência que apresenta em problemas de alta ordem, como as placas de Kirchoff e de Reddy, que requerem soluções de continuidade ao menos  $C^1$ .

O trabalho de [9] investigou possíveis vantagens da  $PU$  suave para modelar descontinuidades e singularidades em problemas bidimensionais da mecânica da fratura elástica linear (MFEL). Neste caso, foram utilizadas funções de enriquecimento polinomiais e singulares, para representar a singularidade da ponta da trinca. Uma observação importante é que nas aproximações  $C^k$  não há erros devido ao produto das tensões descontínuas com o enriquecimento singular sobre as arestas interelementares em torno da ponta da trinca, como ocorre no modelo  $C^0$ . Desta forma, percebeu-se que as funções  $PU$  suaves oferecem uma melhor representação do enriquecimento singular aplicado na modelagem de trincas e que a alta precisão do MEFG- $C^k$  mostrou-se muito apropriada para melhorar as aproximações de tensões ao redor da singularidade introduzida via enriquecimento extrínseco. No entanto, o trabalho de [66] realizou um estudo em que comparou técnicas de aproximação padrão e de alta ordem, com alto grau de continuidade, na análise de problemas de elasticidade unidimensional que apresentavam uma região local de altos gradientes. Neste caso, as funções de aproximação construídas a partir da  $PU$   $C^\infty$  e enriquecimento polinomial não apresentaram vantagens quando comparadas àquelas usadas na técnica de discretização Lagrangeana clássica, por exemplo.

As funções de aproximação com continuidade arbitrária  $k$  são construídas de maneira que se anulem, junto com suas  $k$  primeiras derivadas normais, à medida que se aproximam das arestas da nuvem, utilizando-se a estratégia de enriquecimento extrínseco (método de nuvens  $hp$  [35]), que atribui mais incógnitas aos nós sem alterar a  $PU$ . A técnica para construção das funções  $PU$   $C^k$  é descrita a seguir.

### 2.4.1 Partição da unidade de Shepard

Em uma malha convencional de elementos finitos definida por  $N$  nós com coordenadas  $\{x_j\}_{j=1}^N$ , no domínio  $\Omega$ , considera-se um conjunto de funções  $W_j(\mathbf{x}) \in C_0^k(\omega_j)$ , onde  $j = 1, \dots, N$ , denotadas por função peso. A  $PU$  de Shepard, usada na construção de funções de aproximação com continuidade arbitrária  $k$ , é construída por meio das funções peso  $W_j(\mathbf{x})$  associadas ao nó  $\mathbf{x}_j$  que tem a nuvem  $\omega_j$  como suporte compacto. Através da fórmula de Shepard [67], as funções da  $PU$  de Shepard são definidas como:

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{W_j(\mathbf{x})}{\sum_{\beta(\mathbf{x})} W_{\beta}(\mathbf{x})}, \quad \beta(\mathbf{x}) \in \{\gamma \text{ tal que } W_{\gamma}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\}. \quad (2.50)$$

Pode-se verificar que o conjunto  $\{\varphi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^N$  é tal que  $\varphi_j(\mathbf{x}) \in C_0^k(\omega_j)$ ,  $k \geq 0$  e  $\sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ , e todo subconjunto compacto de  $\Omega$  intercepta somente um número finito de suportes. Portanto,  $\varphi_j(\mathbf{x})$  é uma partição da unidade e sua regularidade depende somente da regularidade das funções peso [11], construídas de modo a garantir a continuidade requerida. Desta forma, sobre cada suporte são construídas funções peso  $C^k$  apropriadas e usadas na fórmula de Shepard, gerando a partição da unidade.

Logo, a  $PU$  resultante será ao menos  $k$ -vezes continuamente diferenciável e as funções de aproximação resultantes do produto da  $PU$  de Shepard com as funções de enriquecimento terão a mesma continuidade, desde que os enriquecimentos também sejam ao menos  $C^k$ . As funções de enriquecimento podem ser escolhidas como funções poli-

nomiais, harmônicas, anisotrópicas ou mesmo funções que sejam parte da solução do problema de valor de contorno [11]. Observa-se que diferentes escolhas de funções  $PU$  são possíveis, levando a diferentes tipos de funções de aproximação.

Vale ressaltar que as funções  $PU$  de Shepard satisfazem a condição de reprodutibilidade de grau 0, uma vez que são capazes de representar uma função constante, pois  $\sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) = 1$ . No entanto, diferentemente das funções  $PU$  convencionais de EF (funções lagrangeanas bilineares, por exemplo), elas não são capazes de representar uma função linear globalmente, ou seja, não satisfazem a condição de reprodutibilidade de grau 1 (que não é obrigatória [68]), expressa por  $\sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) x_j = x$ . Esta é uma razão da utilização de funções de enriquecimento polinomiais, pois para a representação de uma função linear, bastaria acrescentar funções de enriquecimento de grau polinomial  $p = 1$ .

A integração numérica das funções  $PU$  de Shepard e de suas derivadas pode ser realizada utilizando-se a própria malha de elementos finitos, já que o suporte das funções coincidem com as nuvens de elementos.

## 2.4.2 Funções peso

A construção das funções peso ocorre de maneira distinta, dependendo de seus suportes convexos ou não convexos.

As funções peso  $C^k$  com suporte convexo na nuvem  $\omega_j$  podem ser construídas a partir do produto das chamadas *funções de aresta*  $\varepsilon_{j,n}[\xi_n(\mathbf{x})]$  associadas as  $n$  arestas da nuvem. No caso de nuvens com suportes convexos e funções de aresta exponenciais, funções peso  $C^\infty$  são construídas, através do procedimento original de Edwards. De acordo com [53], uma função de aresta é estritamente positiva dentro da nuvem e anula-se suavemente ao aproximar-se da aresta, juntamente com suas  $k$  primeiras derivadas normais, gerando uma função peso  $C_0^\infty(\omega_j)$ . O método de Edwards é considerado robusto por ser livre de restrições geométricas relacionadas à forma dos elementos e das nuvens e por permitir o aumento da regularidade apenas com a adequação



das funções de aresta, sem a necessidade de aumento do suporte das funções.

Buscando evitar que as funções peso variem muito de nuvem para nuvem por influência da malha, tanto pelo número de arestas quanto pela distância da aresta ao nó da nuvem, é importante que sejam utilizadas funções de arestas similares dentro de cada nuvem, como sugerem alguns resultados numéricos. Para isto, é realizado um escalamento nas funções de arestas forçando-as a serem unitárias sobre o nó  $\mathbf{x}_j$  da nuvem, o que torna a função peso também unitária sobre o nó, ou seja,  $W_j(x_j) = \mathbf{1}$ <sup>2</sup>. Desta forma, a função peso é expressa da seguinte maneira [10, 22]:

$$W_j(\mathbf{x}) = \prod_{n=1}^{M_j} \varepsilon_{j,n}(\xi_n), \quad (2.51)$$

sendo  $M_j$  o número de funções de aresta para a nuvem  $\omega_j$ .

As funções de aresta são definidas em termos de coordenadas paramétricas  $\xi_n(\mathbf{x}) = n_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_n)$  normais a cada aresta  $n$  da nuvem, que correspondem à distância entre a posição  $x$  e a aresta  $n$ , no qual  $\mathbf{b}_n$  é o ponto médio da aresta e  $n_n$  é o vetor normal à aresta direcionado para dentro da nuvem (ver Figura 2.3). E, além da imposição de possuir valor unitário no nó da nuvem, o escalamento das funções de arestas também impõe que a taxa de decaimento seja controlada por um parâmetro  $\beta = \frac{\varepsilon_{j,n} \left[ \frac{h_{j,n}}{2} \right]}{\varepsilon_{j,n} [h_{j,n}]}$ , em que  $h_{j,n}$  é a distância normal do nó  $\mathbf{x}_j$  à aresta  $n$ .

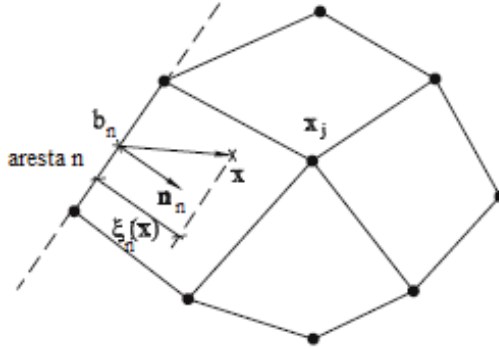
Para estas duas restrições, pode-se usar a seguinte função de aresta [10]:

$$\varepsilon_{j,n} [\xi_n(\mathbf{x})] = \begin{cases} Ae^{-(\xi_n/B)^{-\gamma}} & \text{se } \xi_n > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (2.52)$$

onde o parâmetro de escalamento  $B = h_{j,n} \left( \frac{\log_e \beta}{1-2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$  garante a segunda restrição e  $\gamma$  e  $\beta$  são constantes positivas, cujos valores mais apropri-

---

<sup>2</sup>As funções peso são feitas unitárias em seus nós como uma normalização de seus valores, que é importante para reduzir erros de arredondamento numérico em malhas extremamente distorcidas [11].



**Figura 2.3:** Distância  $\xi_n(\mathbf{x})$  em nuvem convexa (Fonte: [70]).

ados, de acordo com experimentos numéricos, são  $\gamma = 0,6$  e  $\beta = 0,3$ , como sugerido por [14] e [22]. No nó da nuvem, a função de aresta tem o valor:

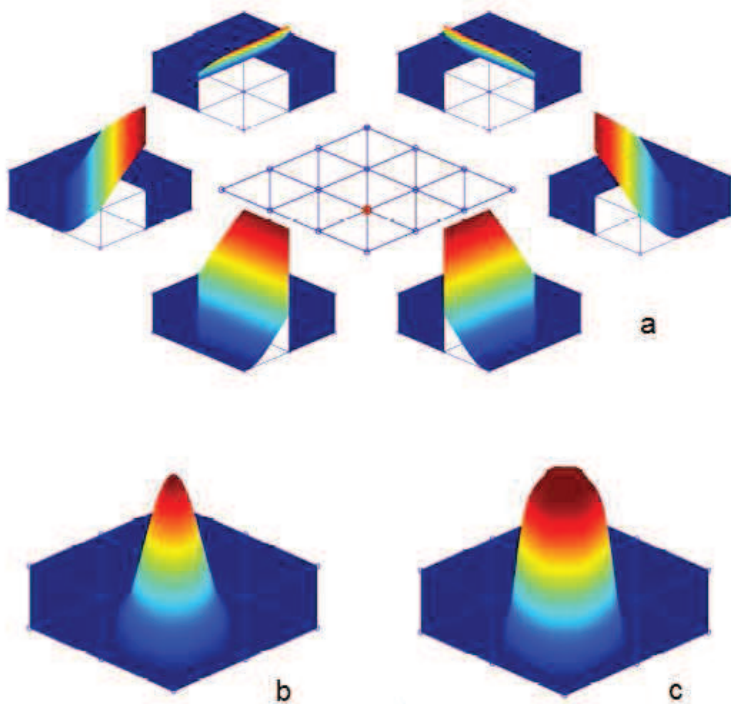
$$\varepsilon_{j,n}[\xi_n(\mathbf{x}_j)] = Ae^{-\left(\frac{1-2\gamma}{\log_e \beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}, \quad (2.53)$$

que é o mesmo para toda aresta  $n$  da nuvem  $\omega_j$ . E, impondo a restrição de que  $\varepsilon_{j,n}[\xi_n(\mathbf{x}_j)] = 1$ , obtém-se  $A = e^{\left(\frac{1-2\gamma}{\log_e \beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}$ .

Assim, a fórmula de Shepard (Equação (2.50)) é usada para construir uma  $PU$  arbitrariamente suave, usando funções peso  $C^\infty$ , como em todos os resultados do presente trabalho.

A Figura 2.4 ilustra um conjunto de funções de aresta exponenciais (Equação (2.52)), a função peso e a  $PU$  geradas a partir delas, para uma nuvem convexa. Na Figura 2.4(c) pode-se perceber a propriedade de *flat-top*, em que a função apresenta uma pequena região quase plana em torno do nó da nuvem, onde as derivadas são nulas. Esta propriedade favorece o enriquecimento da  $PU$  desde que permite representar melhor enriquecimentos especiais, como por exemplo, o enriquecimento singular.

Além de funções exponenciais, outras funções satisfazem os requisi-



**Figura 2.4:** (a) funções de aresta exponenciais, (b) função peso e (c) função  $PU$  para uma nuvem convexa. Funções associadas à nuvem de nó vermelho (Fonte: [14]).

tos de, juntamente com suas  $k$  primeiras derivadas normais, se aproximarem de zero quando atingem sua aresta  $n$ . Por exemplo, em [10], funções de aresta polinomiais foram submetidas a investigações numéricas, mas neste caso, a continuidade é limitada independentemente da geometria da nuvem. Portanto, as funções  $PU$  resultantes são pelo menos  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis, e as funções de aproximação têm a mesma continuidade, desde que os enriquecimentos também sejam, pelo menos,  $C^k$ . Um tipo de função de aresta polinomial de grau  $p$ ,  $p \geq k + 1$ , é dado por:

$$\varepsilon_{j,n}[\xi_n(\mathbf{x})] = \begin{cases} (\xi_n/h_{j,n})^p & \text{se } \xi_n > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (2.54)$$

sendo  $h_{j,n}$  a distância normal do nó  $\mathbf{x}_j$  à aresta  $n$ . As funções de aresta precisam ter ao menos a continuidade  $C^k$ ,  $k \geq 0$ , necessária para a construção da  $PU$ .

Como a abordagem de Edwards é limitada às nuvens com suporte convexo, realiza-se um procedimento similar a fim de aplicá-lo a qualquer tipo de malha de elementos finitos com suportes convexos e não convexos. Nesta abordagem, uma função de aresta  $\varepsilon_{j,n}$  é construída para cada lado de uma nuvem  $\omega_j$  e a não convexidade do contorno é manipulada usando o conceito das funções-R [69]. Desta forma, sendo construídas as  $n$  funções de aresta  $\varepsilon_{j,n}$  e supondo que os lados  $r$  e  $s$  são identificados como os lados não convexos da nuvem  $\omega_j$ , uma nova função de aresta combinando  $\varepsilon_{j,r}$  e  $\varepsilon_{j,s}$  é definida como [22, 70]:

$$\varepsilon_{j,rs}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_{j,r}(\mathbf{x}) \vee_0^k \varepsilon_{j,s}(\mathbf{x})}{\varepsilon_{j,r}(\mathbf{x}_j) \vee_0^k \varepsilon_{j,s}(\mathbf{x}_j)}, \quad (2.55)$$

onde o parâmetro  $k$  é escolhido de acordo com o grau desejado de suavidade. Neste caso, usa-se a função junção R com dois argumentos, ou seja, para  $f_1$  e  $f_2$  tem-se  $f_1 \vee_0^k f_2 = \left( f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \right) (f_1^2 + f_2^2)^{k/2}$ , onde  $k$  é um inteiro positivo. Esta função, obtida através de um produto booleano [71], é analítica em todo lugar ( $C^\infty$ ) exceto no nó  $\mathbf{x}_j$  ( $f_1 = f_2$ ), onde é  $k$  vezes diferenciável, ou seja, pertence a  $C^k$ .

A função de aresta combinada  $\varepsilon_{j,rs}$ , assim como todas as outras

referentes à nuvem  $\omega_j$ , tem valor unitário no nó  $\mathbf{x}_j$  e é usada para construir a função peso  $W_j(\mathbf{x}) C^k$  baseada em elementos finitos usando a Equação (2.51). Assim, a fórmula de Shepard (Equação (2.50)) é novamente usada para construir uma partição da unidade, usando funções peso  $C^k$ . Portanto, a  $PU$  resultante é ao menos  $k$ -vezes continuamente diferenciável em toda parte do domínio  $\Omega$ .

Deve-se observar que diferentes opções de funções  $PU$  são possíveis, o que depende da escolha das funções de aresta [10], levando a diferentes tipos de funções de aproximação.

## 2.5 O método dos elementos finitos generalizados global-local: MEF $G^{gl}$

O MEF $G$  tem sido muito bem aplicado em simulações de linhas com singularidade, propagação de fraturas, problemas acústicos, microestruturas policristalinas, etc. Todas estas aplicações são formuladas com formas fechadas de funções de enriquecimento que são conhecidas por aproximarem bem a solução do problema. Entretanto, funções de enriquecimento analíticas, em geral, não são capazes de gerar aproximações precisas da solução numa malha grosseira tridimensional, por exemplo. Para superar esta limitação, a malha ainda precisa ser refinada como no MEF padrão, embora não de forma tão refinada.

Outro tipo de limitação com as funções de enriquecimento analíticas é em problemas de modelagem de trincas tridimensionais, onde soluções analíticas assintóticas não são disponíveis. O problema agrava-se quando o material é anisotrópico, mesmo em problemas planos.

Isto levou ao desenvolvimento do método dos elementos finitos generalizados global-local (MEF $G^{gl}$ ), que combina o MEF global-local clássico (técnica "zooming" [5]) com a estrutura da partição da unidade, construindo funções de enriquecimento numericamente. Nesta abordagem são modelados problemas de valor de contorno locais na vizinhança de características locais, tais como trincas, onde a solução exibe altos gradientes ou singularidades [19]. As soluções locais são usadas

---

para enriquecer o espaço de aproximação global através da estrutura da partição da unidade, sendo chamadas funções de enriquecimento global-local. E então, o método proposto não depende de soluções analíticas.

Desta forma, o procedimento do  $\text{MEFG}^{gl}$  envolve três etapas:

(I) A solução do problema global inicial (PGI), calculado numa malha grosseira, onde geralmente as trincas não são modeladas.

(II) A solução de problemas locais (PL), um em cada região de alto gradiente ou singularidade, extraídos de pequenos subdomínios do domínio global. A solução global é usada como condições de contorno para os problemas locais.

(III) A solução do problema global enriquecido (PGE) com as funções de enriquecimento global-local, que foram constituídas no problema local.

Os domínios locais são tipicamente analisados em malhas bastante refinadas (são precisamente resolvidos, por exemplo, usando um  $\text{MEFG}_{hp}$ ), podendo-se utilizar condições de contorno de Dirichlet, Neumann ou Cauchy [55]. As características locais, como trincas, não são frequentemente discretizadas na malha global e o problema global é resolvido como se não tivesse trincas no domínio. As trincas são modeladas somente nos domínios locais. Isto habilita o uso de uma única solução global para a análise de qualquer configuração de trincas no domínio.

O procedimento permite a discretização de trincas menores do que elementos da malha global [55] e fornece soluções precisas com o uso de malhas grosseiras ao redor da ponta da trinca. Além disso, é especialmente atrativo para problemas de evolução, como propagação de trincas [6].

O  $\text{MEFG}^{gl}$  pode ser aplicado em problemas com conhecimento a priori limitado sobre sua solução, como aqueles envolvendo fraturas complexas tridimensionais, multiescala, dano ou algumas classes de problemas não lineares [54].

Segundo [8], a abordagem global-local pode produzir soluções não lineares precisas com um custo computacional reduzido quando com-

parado ao MEF padrão. Isto porque as iterações não lineares computacionalmente intensivas podem ser realizadas na malha global grosseira após a criação de adequadas funções de enriquecimento, que descrevem o comportamento local não linear.

Além disso, o cálculo de problemas locais pode ser paralelizado sem dificuldades, permitindo a solução de grandes problemas muito eficientemente [6]. Uma abordagem utilizada em [72] é a divisão de problemas locais grandes em subdomínios locais, que podem ser considerados como uma espécie de "célula unitária", representando uma única característica microestrutural. Desta forma, cada subdomínio local é resolvido separadamente e o custo de resolvê-los em paralelo é menor do que resolver um único problema local. Além disso, pelo fato dos subdomínios locais serem inseridos no espaço de aproximação global usando a  $PU$ , a continuidade nos subcontornos locais é trivialmente aplicada no  $MEFG^{gl}$ .

Estudos vêm sendo realizados com a aplicação do  $MEFG^{gl}$ , onde no PGI são usadas funções polinomiais e o problema local é resolvido com o  $MEFG-hp$ . No caso de discretização de trincas, o problema local é enriquecido tanto com funções polinomiais quanto com funções de Heaviside e assintóticas (apresentadas nas Equações (A.6) e (A.8)), sendo que no PGE a linha da trinca é representada pela solução local [7]. Geralmente as trincas não são discretizadas no domínio do PGI e experimentos numéricos em [19] mostram precisão de resultados nestes casos. De acordo com [19], a robustez e a eficiência computacional do  $MEFG^{gl}$  o faz adequado para a análise de problemas práticos da mecânica da fratura.

Alguns destes estudos comparam resultados obtidos do  $MEFG^{gl}$  e do  $MEFG$  convencional, analisando problemas de elasticidade linear apenas ou com plasticidade confinada no interior do domínio local (ver Subseção 2.5.5). Estes experimentos mostram que o  $MEFG^{gl}$  pode fornecer soluções tão precisas quanto as obtidas pelo  $MEFG$ , apesar da malha mais grosseira e do uso da lei elástica do material no PGI, no caso de soluções não lineares [7, 8]. Dos resultados obtidos em [6],

---

observa-se que o uso de funções de enriquecimento global-local melhora bastante a solução do problema global.

De acordo com [6], o  $\text{MEFG}^{gl}$  é potencialmente mais eficiente do que o MEF ou MEFG padrão. Isto porque o custo computacional de resolver um sistema linear cresce bastante rápido com relação ao tamanho do problema. Portanto, o  $\text{MEFG}^{gl}$  pode ser computacionalmente mais eficiente para resolver vários problemas locais menores no lugar de um único problema global maior. O que ainda tem a vantagem de requerer memória reduzida do computador.

Os resultados em [73] mostram que há três maneiras de melhorar a precisão do  $\text{MEFG}^{gl}$ : (i) ter elementos de ordem superior na malha global; (ii) usar funções de enriquecimento polinomial nos nós globais em adição ao enriquecimento global-local; (iii) aumentar o tamanho do domínio local e da zona de enriquecimento (região enriquecida pela solução do PL) da malha global. Ele constata que o aumento do domínio local melhora a precisão do método, mas não num nível aceitável. E que o uso de enriquecimento polinomial no PGE aumenta bastante a precisão, mesmo para um domínio pequeno do PL.

O trabalho de [6] também estudou como a redução do erro em problemas locais afetam o erro de um problema global enriquecido com soluções locais. Ele estabelece que domínios locais maiores são a princípio desejáveis, pois poderiam reduzir os efeitos do uso das condições de contorno não exatas no problema local. No entanto, grandes domínios demandam computacionalmente mais. Seus experimentos numéricos indicam que camadas adicionais de elementos reduzem o efeito das condições de contorno perturbadas nos problemas locais, mas esta redução não é significativa na precisão da solução global enriquecida. Ou seja, a qualidade da aproximação não é significativamente afetada pelo tamanho dos domínios locais. Isto permite, no caso de trincas, a utilização de domínios locais com apenas uma camada de elementos em volta da ponta da trinca, já que as soluções são suaves longe dela e assim, é possível considerar que nestes lugares a solução do PGI aproxima a solução exata razoavelmente bem. Desta forma, pode-se obter



uma boa solução global enriquecida mesmo que a qualidade da solução global inicial não seja boa.

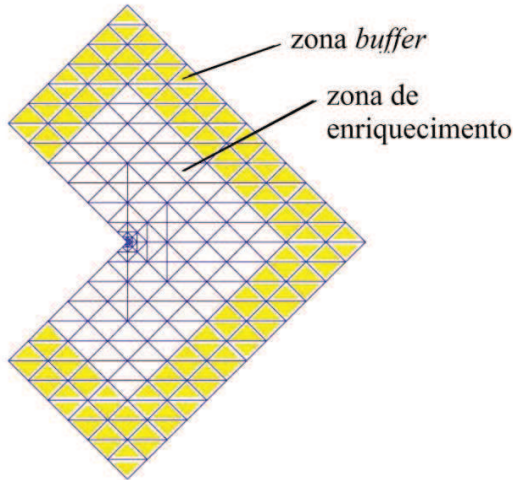
O trabalho de [74] relata que o aumento do tamanho do domínio local não necessariamente melhora a qualidade das funções de enriquecimento para a classe de problemas estudada.

De acordo com [54], se as condições de contorno para os problemas locais são precisas, o erro da solução do  $\text{MEFG}^{gl}$  é limitado pelo erro da solução do  $\text{MEFG-}hp$ . Este é o caso mesmo quando o tamanho dos elementos usados em  $\text{MEFG}^{gl}$  é muito maior do que aqueles usados em  $\text{MEFG-}hp$ . Em [26] é mostrado que a taxa de convergência da solução do  $\text{MEFG}^{gl}$  é controlada pela taxa de convergência das aproximações locais, corroborando com a conclusão de [6].

Para o tratamento das condições de contorno inexatas do problema local são propostas duas estratégias: (a) uso de zona *buffer* no problema local e (b) múltiplas iterações global-local. A primeira estratégia é explicada com o auxílio da Figura 2.5 que representa um problema local. A região interior (branca) é a zona de enriquecimento, em que a solução do PL é usada para enriquecer o espaço de solução do problema global com as funções de enriquecimento global-local. A princípio, o tamanho da zona de enriquecimento pode ser tão grande quanto o tamanho do domínio do PL. A região entre o contorno do domínio local e a zona de enriquecimento é chamada zona *buffer* (amarela) .

A segunda estratégia foi proposta por [75]. Nela a solução do PGE é usado novamente para resolver o PL com novas condições de contorno, obtendo-se uma nova função de enriquecimento global-local. As iterações entre o PGE e o PL ocorrem sucessivamente até que a mudança numa quantidade de interesse seja menor que uma tolerância pré definida. As condições de contorno globais permanecem as mesmas durante os ciclos de iteração global-local.

De acordo com [75], o erro da solução local pode não ser controlado simplesmente pelo refino da malha ou enriquecimento de elementos, mas por uma condição de contorno pobre. Desta forma, ele adicionou um ciclo de iteração global-local em seu experimento e observou uma



**Figura 2.5:** Zona *buffer* em um domínio local (amarela). A região interior (branca) é a zona de enriquecimento.

diferença considerável no PL, mas pouca mudança no PGE.

Em seus exemplos numéricos, [74] conclui que apenas uma iteração global-local é suficiente para o tipo de problema trabalhado, visto que as condições de contorno do PL são suficientemente precisas e a segunda iteração não melhora apreciavelmente o nível de erro. Além disso, os resultados de [75] consideram que havendo necessidade de iterações, provavelmente seria necessária apenas uma iteração para tratar efeitos de poluição numérica.

O trabalho de [76] relata que o efeito das condições de contorno inexatas do PL na precisão do PGE é muito pequena. Em seu trabalho usou o processo iterativo global-local somente uma vez, como proposto em [74, 75].

Em [54], ele concluiu que podem ser alcançados níveis de erro similares através de múltiplas iterações global-local ou pelo uso de uma zona *buffer*. O mesmo sugere que o usuário deve escolher qual estratégia usar, baseado no custo computacional e na conveniência. Quanto ao critério

de parada para as iterações global-local, ele diz que podem ser usados estimadores de erro.

A seguir são detalhadas as formulações dos três passos envolvidos no procedimento do MEFG<sup>gl</sup>.

### 2.5.1 Formulação do problema global inicial

Seja um problema de elasticidade linear definido num domínio global  $\Omega_G \in \mathbb{R}^2$ , no qual a forma forte das equações de equilíbrio é dada por:

$$\begin{aligned} \nabla^T \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & \text{em } \Omega_G \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \text{em } \Gamma_G^D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} & \text{em } \Gamma_G^N \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões,  $\Gamma_G^D$  e  $\Gamma_G^N$  ( $\Gamma_G^D \cap \Gamma_G^N = \emptyset$ ) denotam as partes complementares do contorno global  $\Gamma_G$ , onde as condições de Dirichlet e Neumann são definidas, respectivamente;  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$  são deslocamentos e trações prescritas, respectivamente; e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal externo à  $\Gamma_G^N$ .

Seja  $\mathbf{u}_G^0$  a aproximação da solução exata  $\mathbf{u}$  do problema apresentado na Equação (2.56). A aproximação  $\mathbf{u}_G^0$  é a solução do seguinte problema:

Encontrar  $\mathbf{u}_G^0 \in \mathbf{U}_G^{(0)}(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G)$  tal que,  $\forall \mathbf{v}_G^0 \in \mathbf{U}_G^{(0)}(\Omega_G)$ :

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_G} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}_G^0) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G^0) l_z dx dy + \eta \int_{\Gamma_G^D} \mathbf{v}_G^{0T} \mathbf{u}_G^0 ds \\ = \int_{\Gamma_G^N} \mathbf{v}_G^{0T} \bar{\mathbf{t}} l_z ds + \eta \int_{\Gamma_G^D} \mathbf{v}_G^{0T} \bar{\mathbf{u}} ds, \end{aligned} \quad (2.57)$$

sendo  $\mathbf{U}_G^{(0)}(\Omega_G)$  uma discretização de  $H^1(\Omega_G)$  construída com as funções de aproximação de MEF padrão ou generalizado, dado por:

$$\mathbf{U}_G^{(0)}(\Omega_G) = \left\{ \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{D_L} \mathbf{u}_{\alpha i} L_{\alpha i}(\mathbf{x}) \right\},$$

em que  $\mathbf{u}_{\alpha i}$  são graus de liberdade nodais associados ao problema global inicial,  $D_L$  é a dimensão de um conjunto de funções de enriquecimento

$L_{\alpha i}(\mathbf{x})$ , com  $L_{\alpha 1}(\mathbf{x}) = 1$  e  $\eta$  é um parâmetro de penalidade. O método da penalidade costuma ser usado devido a sua simplicidade e generalidade para impor condições de contorno de Dirichlet [6]. No entanto, no presente trabalho as condições de contorno de Dirichlet são restrições de deslocamentos necessárias para evitar o movimento de corpo rígido, cuja imposição é feita em forma forte pontual e desta forma, o método da penalidade não é utilizado.

Se a Equação (2.57) define um problema linear, tem-se um sistema de equações lineares para os graus de liberdade desconhecidos de  $\mathbf{u}_G^0$ , sendo que a malha utilizada para resolver este problema é tipicamente uma malha grosseira [54].

## 2.5.2 Formulação dos problemas locais

Seja o domínio local  $\Omega_L$  um subdomínio de  $\Omega_G$ . Este domínio local pode conter trincas, orifícios, inclusões, fibras ou outras características de interesse. A formulação é generalizada considerando-se os casos de condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Cauchy, fornecidas pela solução global  $\mathbf{u}_G^0$ .

A solução do problema local é obtida sobre  $\Omega_L$  [55]:

Encontrar  $\mathbf{u}_L \in \mathbf{U}_L(\Omega_L) \subset H^1(\Omega_L)$  tal que,  $\forall \mathbf{v}_L \in \mathbf{U}_L(\Omega_L)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) l_z dx dy + \eta \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^D} \mathbf{u}_L \cdot \mathbf{v}_L ds + \\ \kappa \int_{\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} \mathbf{u}_L \cdot \mathbf{v}_L ds = \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L l_z ds + \\ \eta \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^D} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_L ds + \int_{\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} (\mathbf{t}(\mathbf{u}_G^0) + \kappa \mathbf{u}_G^0) \cdot \mathbf{v}_L ds, \end{aligned} \quad (2.58)$$

sendo  $\Gamma_L$  o contorno do problema local e  $\mathbf{U}_L(\Omega_L)$  uma discretização de  $H^1(\Omega_L)$  que usa as funções de aproximação do MEFG. O espaço  $\mathbf{U}_L(\Omega_L)$  é análogo ao  $\mathbf{U}_G^{(0)}(\Omega_G)$ , mas é definido sobre  $\Omega_L$ , numa malha mais refinada, com funções de enriquecimento polinomiais de maior ordem do que as usadas em  $\mathbf{U}_G^{(0)}(\Omega_G)$  e demais funções de enriquecimento adequadas à representação da solução do problema.

O vetor tensão  $\mathbf{t}(\mathbf{u}_G^0)$  que aparece na integral sobre  $\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$  é calculado da solução da malha grosseira usando a relação de Cauchy,

ou seja,

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}_G^0) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G^0) = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_G^0)), \quad (2.59)$$

em que  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário normal à  $\Gamma_L^N$ , apontado para o exterior de  $\Omega_L$ . Os parâmetros  $\eta$  e  $\kappa$  são parâmetros de penalidade e de rigidez de Cauchy definidos sobre  $\Gamma_L \cap \Gamma_G^D$  e  $\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$ , respectivamente. Em [8] o parâmetro  $\kappa$  utilizado foi selecionado do caso elástico linear e introduzido por [55], da seguinte forma:

$$\kappa = \frac{E}{nd\sqrt{V_0 J}}, \quad (2.60)$$

em que  $E$  é o módulo de Young,  $nd$  é o número das dimensões espaciais do problema,  $V_0$  é o volume do elemento de referência usado e  $J$  é o jacobiano do elemento global cujo contorno local contém as condições de mola impostas associadas às condições de interface de Cauchy. Os experimentos em [55] mostram que qualquer valor de  $\kappa$  comparável ou maior que a rigidez do corpo é aceitável e fornece função de enriquecimento global-local com boas propriedades de aproximação.

Pode-se selecionar o tipo de condições de contorno fornecidas por  $\mathbf{u}_G^0$ , dependendo da escolha de  $\kappa$  [55]:

(i) Condição de contorno de Neumann: Neste caso, define-se  $\kappa = 0$ . As trações definidas na Equação (2.59) são prescritas em  $\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$ . No caso de um problema de Neumann puro, onde  $\Gamma_L \cap \Gamma_G^D = \emptyset$ , o problema definido na Equação (2.58) pode não ser bem posto, uma vez que, no caso do subdomínio ser interno, será uma porção de material desvinculado (sem condições de contorno de Dirichlet, isto é, com movimentos de corpo rígido), submetida a carregamentos que são não equilibrados, desde que se tratam de trações obtidas via MEF.

(ii) Condição de contorno de Dirichlet: Neste caso, define-se  $\kappa = \eta \gg 1$ . Assim, a solução do problema global inicial  $\mathbf{u}_G^0$  é usada como condição de contorno de Dirichlet sobre  $\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$ , como foi realizado em [6].

(iii) Condição de contorno de mola ou de Cauchy: Neste caso, define-se  $0 < \kappa < \eta$ . As condições de contorno de Cauchy são encontradas em

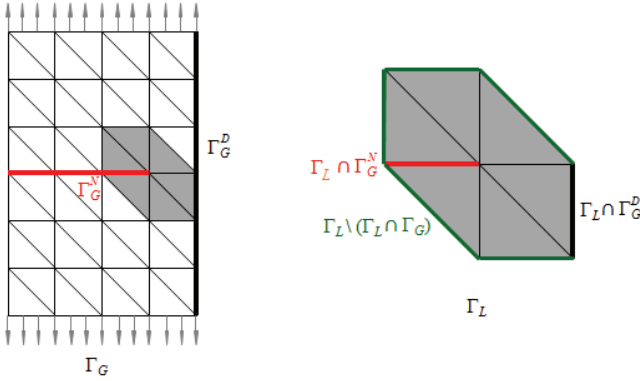
[18] e combinam as condições de contorno de Neumann e Dirichlet.

As condições de contorno de Dirichlet e Neumann são casos especiais das condições de contorno de Cauchy/mola, dependendo da escolha da rigidez da mola. Resultados numéricos demonstram que as condições de contorno de Dirichlet levam a resultados piores do que as condições de contorno de Neumann e as duas levam a resultados piores do que os obtidos com as condições de contorno de Cauchy [55].

Neste trabalho utiliza-se as condições de contorno de Cauchy, sendo que uma vez obtida a solução do PGI  $\mathbf{u}_G^0$ , o processo de transferência das condições de contorno do domínio global para o domínio local é realizado através da transmissão dos resultados de força e deslocamento para os pontos de integração do contorno  $\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$ . Para isto faz-se necessário um mapeamento das coordenadas do PL para as coordenadas do PG, a fim de obter os valores do contorno de Cauchy nos pontos indicados.

O aspecto chave do problema local é o uso da solução de MEFM do problema global inicial  $\mathbf{u}_G^0$  como condição de contorno sobre  $\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$ , já que longe da ponta da trinca as soluções são suaves, onde é possível supor que  $\mathbf{u}_G^0$  pode aproximar a solução exata razoavelmente bem [6]. Condições de contorno exatas são prescritas sobre porções de  $\Gamma_L$  que interceptam  $\Gamma_G^D$  ou  $\Gamma_G^N$ . A Figura 2.6 ilustra o domínio de uma chapa bidimensional trincada com discretização triangular, no qual a região em destaque representa o domínio do problema local.

O erro da solução do problema local não depende somente da discretização usada no domínio local, mas é também afetada pela qualidade das condições de contorno usadas sobre  $\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$ , ou seja, da solução global inicial. Como resultado, o erro de  $\mathbf{u}_L$  pode ser grande mesmo que seja usada uma malha muito refinada sobre  $\Omega_L$ .



**Figura 2.6:** Domínio global e domínio local com uma camada de elementos.

### 2.5.3 Funções de enriquecimento global-local e problema global enriquecido

A solução local  $\mathbf{u}_L$  é potencialmente uma excelente função de enriquecimento para o problema global definido na Equação (2.57). Ela é chamada de função de enriquecimento global-local porque é calculada com a mesma estratégia do chamado MEF global-local [5]. Usando a Equação (2.48), pode-se definir a seguinte função de aproximação global do MEFG para a região enriquecida [6]:

$$\phi_\alpha = \varphi_\alpha \mathbf{u}_L, \quad (2.61)$$

em que  $\varphi_\alpha$  denota uma função da partição da unidade do problema global. Estas funções enriquecedoras são usadas somente nos nós  $\mathbf{x}_\alpha$  da malha global cujo suporte  $\omega_\alpha$  está contido no domínio local  $\Omega_L$ . O problema global é então resolvido novamente com o espaço solução agora aumentado com as funções enriquecedoras. A solução deste problema global enriquecido é denotado por  $\mathbf{u}_G^E$  e sua formulação é dada por:

Encontrar  $\mathbf{u}_G^E \in \mathbf{U}_G^E(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G)$  tal que,  $\forall \mathbf{v}_G^E \in \mathbf{U}_G^E(\Omega_G)$  [55]:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_G} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}_G^E) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G^E) l_z dx dy + \eta \int_{\Gamma_G^D} \mathbf{v}_G^E{}^T \mathbf{u}_G^E ds \\ = \int_{\Gamma_G^N} \mathbf{v}_G^E{}^T \bar{\mathbf{t}} l_z ds + \eta \int_{\Gamma_G^D} \mathbf{v}_G^E{}^T \bar{\mathbf{u}} ds, \end{aligned} \quad (2.62)$$

sendo  $\mathbf{U}_G^E(\Omega_G)$  o espaço  $\mathbf{U}_G^{(0)}(\Omega_G)$  aumentado com as funções do MEFG (2.61):

$$\mathbf{U}_G^E(\Omega_G) = \left\{ \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{D_L} \mathbf{u}_{\alpha i} L_{\alpha i}(\mathbf{x})}_{\text{aprox. da escala grosseira}} + \underbrace{\sum_{\beta \in I_{gl}} \varphi_{\beta}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\beta}^{gl}(\mathbf{x})}_{\text{aprox. da escala refinada}} \right\}, \quad (2.63)$$

onde  $I_{gl}$  é o conjunto de nós enriquecidos com a função  $\mathbf{u}_L$ ;  $D_L$  é a dimensão de um conjunto de funções de enriquecimento polinomiais  $L_{\alpha i}(\mathbf{x})$ , com  $L_{\alpha 1}(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\mathbf{u}_{\alpha i}$  são graus de liberdade nodais associados ao problema global inicial e  $\mathbf{u}_{\beta}^{gl} = \begin{bmatrix} u_{\beta 1}^{gl} & u_{L1}(\mathbf{x}) \\ u_{\beta 2}^{gl} & u_{L2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$ , onde  $u_{\beta j}^{gl}$ ,  $\beta \in I_{gl}$ ,  $j = 1, 2$ , são graus de liberdade nodais associados ao problema global enriquecido e  $u_{Lj}(\mathbf{x})$  são as componentes cartesianas do vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}_L$ .

Indiferente do número de graus de liberdade requeridos para solucionar o problema local precisamente, somente dois graus de liberdade são adicionados hierarquicamente aos nós da malha global a serem enriquecidos. Eles são as componentes cartesianas da função apresentada na Equação (2.61).

O problema global enriquecido é resolvido na mesma malha grosseira usada no cálculo do problema global inicial. Isto contrasta com o MEF, que requer discretizações globais muito refinadas para capturar



comportamento de pequena escala no domínio global. Além disso, como os enriquecimentos da solução local são hierárquicos e usados somente em poucos nós na malha global grosseira, tem-se que o problema global enriquecido pode ser resolvido com baixo custo computacional [19].

## 2.5.4 Solução do problema global enriquecido (elasticidade)

Pela definição do espaço global enriquecido  $\mathbf{U}_G^E(\Omega_G)$  apresentado na Equação (2.63), tem-se que as funções de aproximação global-local do MEF $\tilde{G}$  são hierarquicamente adicionadas ao espaço de malha grosseira  $\mathbf{U}_G^{(0)}(\Omega_G)$  [55], ou seja, todas as funções de aproximação globais iniciais permanecem inalteradas no problema global. Neste contexto, num problema de elasticidade bidimensional, somente dois graus de liberdade são adicionados em cada nó global na malha grosseira enriquecida com  $\mathbf{u}_L$ , que correspondem às componentes  $x$  e  $y$  da solução local, mesmo que um número grande de graus de liberdade seja usado no cálculo de  $\mathbf{u}_L$  [6].

Desta forma, sejam  $\mathbf{K}_G^0 \mathbf{u}_G^0 = \mathbf{f}_G^0$  e  $\mathbf{K}_G^E \mathbf{u}_G^E = \mathbf{f}_G^E$  os sistemas de equações associados às discretizações globais inicial e enriquecida, respectivamente, sendo que  $\mathbf{u}_G^0$  representa o vetor de deslocamentos nodais, que difere do vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}_G^0 = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{u}_G^0$ , onde  $\mathbf{\Phi}$  é a matriz de funções de aproximação do MEF $\tilde{G}$ . Os vetores  $\mathbf{u}_G^E$  e  $\mathbf{f}_G^E$  podem ser particionados, usando a propriedade hierárquica das funções de enriquecimento, como  $\mathbf{u}_G^E = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_G^0 & \mathbf{u}_G^{gl} \end{bmatrix}^T$  e  $\mathbf{f}_G^E = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_G^0 & \mathbf{f}_G^{gl} \end{bmatrix}^T$ , onde  $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$  e  $\mathbf{u}_G^{gl}$  são os coeficientes nodais associados à discretização global inicial e aos enriquecimentos hierárquicos global-local, respectivamente. A matriz de rigidez global  $\mathbf{K}_G^0$  do problema inicial (Equação (2.57)) é aninhada na matriz global  $\mathbf{K}_G^E$  do problema enriquecido (Equação (2.62)) como segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_G^0 & \mathbf{K}_G^{0,gl} \\ \mathbf{K}_G^{gl,0} & \mathbf{K}_G^{gl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_G^0 \\ \mathbf{u}_G^{gl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_G^0 \\ \mathbf{f}_G^{gl} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

em que  $\mathbf{K}_G^{0,gl} = \left(\mathbf{K}_G^{gl,0}\right)^T$ , “gl” e “0” estão associados ao enriquecimento hierárquico global-local e ao problema global inicial, respectivamente. O vetor  $\mathbf{u}_G^{gl}$  contém os graus de liberdade  $u_{\beta j}^{gl}$ ,  $\beta \in I_{gl}$ ,  $j = 1, 2$ , sendo que sua dimensão é pequena quando comparada com a do vetor  $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ .

Desta forma, a natureza hierárquica e o tamanho pequeno de  $\mathbf{u}_G^{gl}$  podem ser explorados para resolver eficientemente o sistema de equações global enriquecido (Equação (2.64)). Na abordagem utilizada por [6], os graus de liberdade global-local  $u_{\beta j}$  são condensados, usando a fatorização disponível do problema global inicial (fatorização da matriz global inteira definida na Equação (2.64)). Métodos iterativos também podem ser usados eficientemente para resolver o problema global enriquecido.

Este trabalho não utiliza a estratégia apresentada na Equação (2.64), pois considera também a análise de problemas elastoplásticos, onde a matriz  $\mathbf{K}_G^0$  não pode ser aninhada à matriz global  $\mathbf{K}_G^E$ . A próxima seção apresenta a estratégia geralmente utilizada em análises de problemas não lineares.

### 2.5.5 MEF $G^{gl}$ para problemas não lineares

Em muitas aplicações práticas de engenharia é comum analisar estruturas complexas que mostram, ao longo de grandes extensões, um comportamento elástico linear, mas que exibem plasticidade confinada em algumas pequenas regiões críticas. Nestas classes de problemas que envolvem não linearidade do material, funções de enriquecimento com boas propriedades de aproximação não são fáceis de serem construídas analiticamente. No entanto, esta limitação é solucionada usando-se funções de enriquecimento global-local que são construídas numericamente para não linearidade localizada do material.

Experimentos numéricos em [7] demonstram a robustez, precisão e eficiência computacional do MEF $G^{gl}$  para um problema não linear baseado na teoria da plasticidade  $J_2$  com encruamento isotrópico linear. No contexto da forma incremental do problema (procedimento de

Newton-Rhapson), cada passo incremental pode ser definido por um pseudo passo de tempo  $t_n$ ,  $n = 1, \dots, n_{m\acute{a}x}$ , onde  $n_{m\acute{a}x}$  denota o número máximo de pseudo passos de tempo.

De acordo com [7] e [8], a análise de problemas não lineares com o MEF $G^{gl}$  é realizada da seguinte maneira:

**Etapa 1:** O problema global inicial é resolvido para o pseudo passo de tempo final  $t_{n_{m\acute{a}x}}$ , numa malha grosseira, usando-se um modelo constitutivo elástico linear. Trincas não são modeladas na resolucao deste problema.

**Etapa 2:** O problema local contém uma pequena região crítica com comportamento não linear e é resolvido para o pseudo passo de tempo final  $t_{n_{m\acute{a}x}}$ , utilizando-se o algoritmo iterativo de Newton-Rhapson. As condições de contorno deste problema são obtidas da soluçao do problema global inicial. O MEF $G-hp$  é utilizado para discretizar o problema local, obtendo-se soluções mais precisas, capazes de aproximar características não lineares localizadas do problema.

**Etapa 3:** A soluçao local não linear, encontrada no pseudo passo de tempo final  $t_{n_{m\acute{a}x}}$ , é usada como funcao de enriquecimento do problema global em cada pseudo passo de tempo. Nesta etapa, o problema global é resolvido incrementalmente com um modelo constitutivo não linear e com a mesma malha global grosseira em cada pseudo passo de tempo  $t_n$ , sendo que somente a soluçao local não linear é usada como enriquecimento.

Experimentos numéricos realizados em [8] mostram que quanto mais refinada a malha no problema local, isto é, quanto menor seu erro para as dadas condições de contorno locais, melhor a soluçao global calculada com estas funções de enriquecimento locais.

Neste modelo, o comportamento não linear deve estar totalmente confinado no interior de  $\Omega_L$ . Isto é conseguido selecionando-se o tamanho do domínio local  $\Omega_L$  de tal maneira que contenha completamente a região onde a tensão de von Mises da soluçao do PGI é maior do que a tensão de escoamento inicial. Assim, o uso da lei elástica do material no problema global inicial é justificada pela suposicao de que a defor-

mação plástica está confinada no interior do domínio local, em adição aos efeitos do princípio de St.Venant que permeia o operador diferencial do problema.

Nesta metodologia, as variáveis de estado do problema local não são transferidas ou compartilhadas com o problema global. Cada problema tem seu próprio conjunto de variáveis de estado armazenado em seus pontos de integração, como no MEF padrão.

### **2.5.6 Integração numérica das funções de enriquecimento global-local**

A integração numérica das funções de enriquecimento global-local pode ser realizada precisamente e eficientemente com a ideia básica de integrá-las na malha global usando as malhas locais. Isto é possível quando estas malhas são aninhadas na malha global. Assim, a integração numérica do elemento global enriquecido com a solução local é realizada nos pontos de integração dos elementos locais que estão aninhados no elemento global. Estes pequenos elementos são chamados de elementos descendentes do problema local [6].

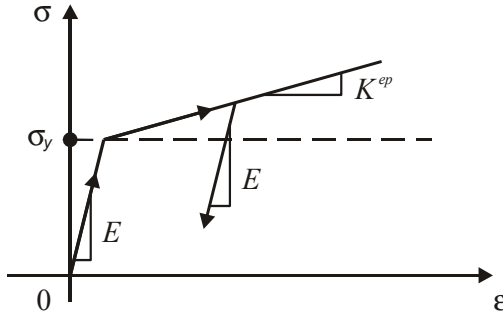


## Capítulo 3

# Plasticidade bidimensional

Certos materiais, como os metais, quando solicitados em um estado uniaxial de tensões, até certo nível de tensão apresentam um comportamento elástico linear, deformando-se de acordo com o *módulo elástico*  $E$ . Esta tensão limitante está representada na curva tensão-deformação por  $\sigma_y$  (Figura 3.1) e é chamada de *tensão limite de escoamento*. Após ultrapassar  $\sigma_y$ , o material passa a apresentar uma resposta tanto elástica quanto plástica, ou seja, um comportamento elastoplástico, caracterizado pelo módulo tangente elastoplástico  $K^{ep}$ . As alterações na estrutura do material devido à deformação plástica são irreversíveis [77], ocorrendo a evolução de deformações residuais. A Figura 3.1 ilustra o comportamento uniaxial idealizado para o modelo com encruamento linear.

A resposta inelástica do material, como no caso da plasticidade, é um processo incremental que às vezes é caracterizado pelas equações constitutivas expressas em taxas. Assim, o algoritmo de integração conhecido como algoritmo de mapeamento de retorno fornece um robusto e efetivo esquema de integração numérica das taxas das equações constitutivas, durante uma sequência discreta de incrementos de tempo [61].



**Figura 3.1:** Curva tensão-deformação para o modelo com encruamento linear.

Nesta seção são apresentadas as equações que governam a plasticidade clássica (independente de taxa) no contexto bidimensional, que podem ser encontradas em [4, 60, 78].

O modelo aqui adotado é o elastoplástico  $J_2$  com encruamento, cujas principais características são: função de escoamento de von Mises, regra de normalidade para o escoamento plástico, encruamento isotrópico linear e hipótese de associatividade para lei do encruamento. O escoamento plástico é considerado como um processo irreversível e é caracterizado em termos da história das seguintes variáveis independentes: o tensor de deformações  $\varepsilon$ , o tensor de deformação plástica  $\varepsilon^p$  e a variável interna de encruamento  $\alpha$ .

### 3.1 Plasticidade para estado plano de deformações e axissimétrico

A formulação clássica da plasticidade apresentada aqui para estado plano de deformações e axissimétrico é uma particularização da teoria tridimensional. Do ponto de vista teórico, estas classes de problemas sofrem restrições, ou seja, em um problema geral de valor inicial elastoplástico, certas componentes do tensor de deformações são zeradas.

Considerando a decomposição aditiva do tensor de deformações to-

tal  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$  e sendo  $\mathbf{C}$  o tensor constitutivo elástico isotrópico linear,  $\mathbf{s}$  a parte deviatória do tensor de tensões e  $\sigma_y$  a tensão de escoamento, as equações que governam o modelo são:

1) Relação tensão-deformação para elasticidade isotrópica linear:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p]$ , onde a matriz constitutiva  $\mathbf{C}$ , para o estado plano de deformações é dada pela Equação (2.10) e para o caso axissimétrico é dada pela Equação (2.27).

2) Critério de escoamento de von Mises:  $f = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}\| - (\sigma_y + q) \leq 0$ , sendo  $q = H'\alpha$ , onde  $H'$  é o módulo plástico de encruamento isotrópico linear e  $\alpha$  é a variável interna de encruamento isotrópico relacionada à evolução da deformação plástica;

3) Regra do escoamento:  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\mathbf{n}}$ , com  $\underline{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}$ ;

4) Lei do encruamento:  $\dot{\alpha} = -\gamma \partial_q f = \gamma$ ;

5) Taxa da deformação plástica acumulada:  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ac}^p = \dot{\alpha}$ ;

6) Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:  $\gamma \geq 0$ ,  $f(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0$ ,  $\gamma f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$ ;

7) Condição de consistência:  $\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$  (para  $\boldsymbol{\sigma}$  tal que  $f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$ ), onde  $\dot{f}$  é a taxa da função de escoamento.

O parâmetro  $\gamma \geq 0$  é uma função não negativa, chamada parâmetro de consistência, que fornece a “velocidade” da plastificação e obedece as condições de complementaridade de Kuhn-Tucker.

Em problemas de estado plano de deformações ( $\varepsilon_{33} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$ ) e análise axissimétrica, a notação vetorial das componentes de tensões são dadas, respectivamente, por  $\boldsymbol{\sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \tau_{12} \end{bmatrix}^T$  e  $\boldsymbol{\sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \tau_{12} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^T$ , onde o índice 3 está associado com a direção circunferencial. Para o estado plano de deformações, tem-se que  $\tau_{23} = \tau_{31} = 0$  e, em geral, para o caso isotrópico  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ .

Analogamente, as componentes de deformações para estado plano de deformações e análise axissimétrica são dadas, respectivamente, por

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \gamma_{12} \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \gamma_{12} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}^T,$$

onde  $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ .



### 3.1.1 Algoritmo de integração e mapeamento de retorno

A seguir é apresentado um algoritmo de mapeamento de retorno do tipo implícito, onde considera-se um estado elástico teste (etapa de previsão) projetado sobre a superfície de escoamento (etapa de correção), para integração numérica das equações incrementais do modelo constitutivo [60]. O algoritmo de integração apresentado é o tridimensional genérico, sendo que a particularização para os estados de deformação restritos é trivialmente obtida pela eliminação das componentes de deformação pertinentes. No entanto, esta simples estratégia de mapeamento de retorno não é válida para o estado plano de tensões.

#### Algoritmo implícito para integração numérica das equações constitutivas elastoplásticas

O algoritmo apresentado é utilizado para elastoplasticidade tridimensional com encruamento isotrópico linear:

1) Calcula estado teste (preditor elástico):

Dado  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  e as variáveis de estado em  $t_n$ , calcula o estado elástico teste

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}; \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p \text{ teste}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p; \\
 \alpha_{n+1}^{\text{teste}} &= \alpha_n; \\
 p_{n+1}^{\text{teste}} &= \kappa \bar{\varepsilon}_{v \ n+1}^{e \text{ teste}}; \\
 \mathbf{s}_{n+1}^{\text{teste}} &= 2\mu \bar{\varepsilon}_{d \ n+1}^{e \text{ teste}}; \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{ac \ n+1}^{p \text{ teste}} &= \sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{teste}})}; \\
 \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{teste}} &= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{teste}} + p_{n+1}^{\text{teste}} \mathbf{I}.
 \end{aligned}$$

onde  $\mu$  é uma constante de Lamé.

2) Testa consistência plástica:

$$\begin{aligned}
\text{se } f_{n+1}^{teste} &:= \sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{teste})} - (\sigma_y + H' \alpha_{n+1}^{teste}) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2} \|\mathbf{s}_{n+1}^{teste}\|} - (\sigma_y + H' \alpha_{n+1}^{teste}) \leq 0, \\
&\quad (\text{então passo elástico})
\end{aligned}$$

o conjunto  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}$  e  $C_{n+1}^{ep} = C$ ,

finaliza.

Senão (passo plástico, vá para (3)).

3) Mapeamento de retorno (estado de correção):

Impondo-se a condição

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \sqrt{\frac{3}{2} \|\mathbf{s}_{n+1}\|} - (\sigma_y + H' \alpha_{n+1}) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2} \left( \|\mathbf{s}_{n+1}^{teste}\| - 2\mu \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \right)} - [\sigma_y + H' (\alpha_n + \Delta\gamma)] \\
&= f_{n+1}^{teste} - \Delta\gamma (3\mu + H') = 0,
\end{aligned}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma &= \frac{f_{n+1}^{teste}}{3\mu + H'} > 0; \quad \underline{\mathbf{n}}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{teste}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{teste}\|}; \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}, \quad \left( \mathbf{N}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\mathbf{n}}_{n+1} \right); \\
\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\gamma; \quad p_{n+1} := p_{n+1}^{teste}; \\
\mathbf{s}_{n+1} &= \left( 1 - \frac{\Delta\gamma 3\mu}{\sigma_{eq\ n+1}^{teste}} \right) \mathbf{s}_{n+1}^{teste}; \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I}; \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^e; \quad \zeta_{n+1} = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1})}
\end{aligned}$$

4) Calcula o operador tangente elastoplástico algorítmico:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{ep} &= 2\mu \left( \mathbf{1} - \frac{3\mu \Delta\gamma}{\sigma_{eq}^{teste} n+1} \right) \left( \mathbf{II} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \\ &+ 6\mu^2 \left( \frac{\Delta\gamma}{\sigma_{eq}^{teste} n+1} - \frac{1}{3\mu + H'} \right) \underline{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \underline{\mathbf{n}}_{n+1} + k \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \end{aligned}$$

onde  $k$  o módulo volumétrico,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda-ordem:

$$\mathbf{I} = \delta_{ij} e_i \otimes e_j$$

e  $\mathbf{II}$  é o tensor identidade simétrico de quarta-ordem, dado por:

$$\mathbf{II} = \frac{1}{2} [\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l,$$

sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker.

Finaliza.

Observação:

$\|\cdot\|$  é a norma euclidiana.

No caso de estado plano de tensões, como algumas componentes de tensão são prescritas ( $\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$ ), não se pode mais aplicar o algoritmo de integração tridimensional genérico, na qual todas as componentes de tensão são desconhecidas. Desta forma, utiliza-se uma outra estratégia que pode ser visualizada no Apêndice B. Análises com estado plano de tensões não são contempladas neste trabalho.

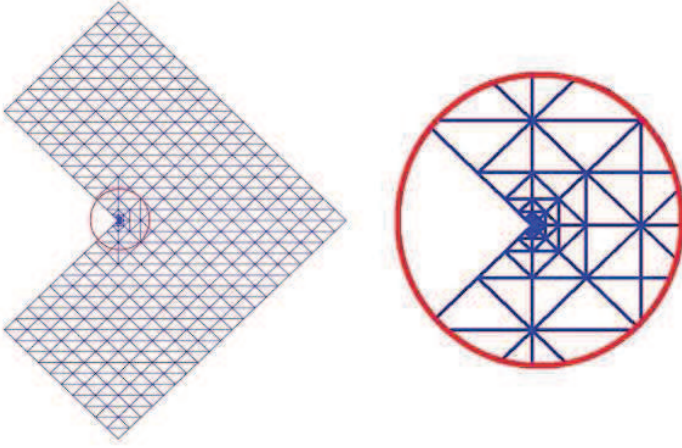
## Capítulo 4

# Resultados numéricos

Nesta seção apresentam-se dois experimentos numéricos. O objetivo é comparar os desempenhos do  $\text{MEFG}^{gl}$  nos quais o enriquecimento utilizado no problema global (PG) é solução do problema local (PL), construído com funções  $PU C^0$  ( $\text{MEFG}^{gl-C^0}$ ) e funções  $PU C^k$  ( $\text{MEFG}^{gl-C^k}$ ), em análise de problemas bidimensionais elástico e elastoplástico. O problema utilizado é o domínio de formato L, um problema clássico na teoria da elasticidade no qual uma solução analítica é conhecida [79].

A versão elastoplástica deste problema é considerada aqui com o objetivo de (a) investigar os efeitos da discretização suave nos campos de tensões aproximados e (b) comparar a evolução da zona de processo na vizinhança do vértice reentrante para os dois tipos de regularidade consideradas. O carregamento usado neste exemplo é o correspondente à abertura de Modo I.

A formulação foi numericamente implementada considerando um domínio em que ocorrem apenas nuvens convexas. O domínio foi particionado em elementos triangulares de três nós e arestas retilíneas. Desta forma, na implementação do  $\text{MEFG}-C^k$  foi usada uma  $PU$  de continuidade arbitrária ( $PU C^\infty$ ) sobre todo o domínio, gerando aproximações de tensões com continuidade interelementar. Foram utilizados  $b = 1, 2$  e  $3$ , que representam o grau polinomial de reprodutibilidade

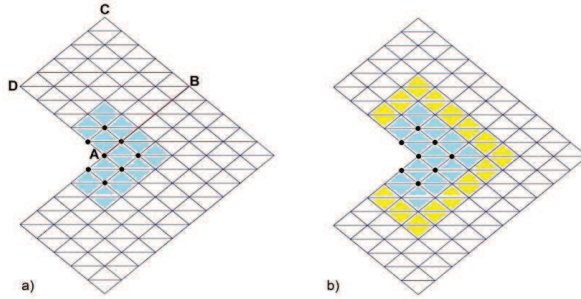


**Figura 4.1:** Malha utilizada para a solução de referência.

do subespaço de aproximação do MEF $G$  utilizado (grau da base). Note que  $b = p + 1$  para  $PU C^0$  e  $b = p$  para  $PU C^k$ , onde  $p$  é o grau do enriquecimento polinomial, como identificado em [11].

Os resultados numéricos foram comparados com a solução analítica (para a análise elástica) e com uma solução de referência, onde utilizou-se uma malha geométrica próxima à reentrância, na qual a taxa de redução dos elementos é  $1/2$ , aninhada a uma malha regular (ver Figura 4.1), totalizando 662 elementos, com função de enriquecimento polinomial uniforme de grau  $p = 3$  em todo o domínio ( $b = 4$ ).

Nas análises, o domínio do PG foi discretizado por 96 elementos numa malha regular grosseira mostrada na Figura 4.2, onde a região colorida representa o domínio do PL (a) sem o uso de zona *buffer* (apenas a região de enriquecimento) e (b) com o uso de zona *buffer* (representada pela camada de elementos amarelos). Os nós do PG que receberam enriquecimento global-local estão marcados com círculos pretos. Para o PL foram utilizados três níveis de refino de malha, que podem ser visualizados nas Figuras 4.3 (malha MA), 4.4 (malha MB) e 4.5 (malha MC). As figuras mostram os domínios locais (a) sem



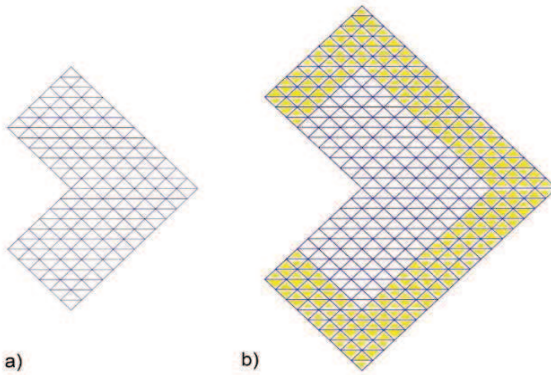
**Figura 4.2:** Malha do problema global, onde a região colorida representa o domínio local (a) sem e (b) com zona *buffer*. Os círculos pretos indicam os nós do problema global enriquecidos com função global-local.

zona *buffer* e (b) com zona *buffer*, em que a zona *buffer* equivale a uma camada de elementos da malha global grosseira (ver Figura 4.2-b).

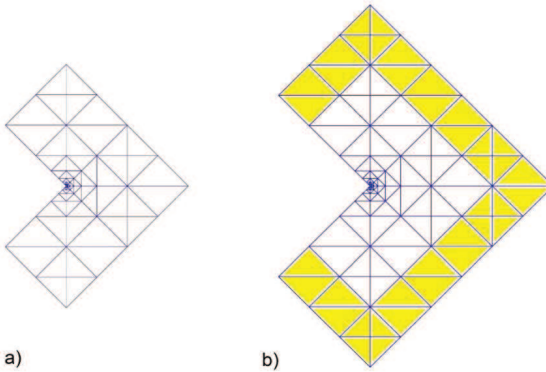
A malha MA é regular uniforme e contém 216 elementos sem a zona *buffer* (MA1) e 486 elementos com a zona *buffer* (MA2). A malha MB é composta de uma malha geométrica (ver Figura 4.6) próxima à reentrância (a mesma da malha de referência), aninhada a uma malha regular cujos elementos tem a mesma dimensão dos elementos da malha global. No total são 98 elementos sem a zona *buffer* (MB1) e 136 elementos com a zona *buffer* (MB2). A malha MC é idêntica à malha de referência, na qual uma malha geométrica é aninhada à região de enriquecimento, sendo composta por 158 elementos sem a zona *buffer* (MC1) e 278 elementos com a zona *buffer* (MC2).

Com relação à regularidade das funções do PL, as análises global-local receberam denominações diferentes de acordo com a distribuição das funções *PU* nas camadas de elementos:

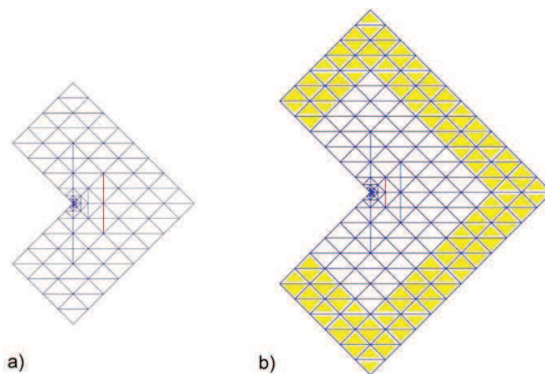
- a) Análise C0: todas as funções do domínio local são  $C^0$ ;
- b) Análise Ck1: todas as funções do domínio local são  $C^k$ ;
- c) Análise Ck2: as funções  $C^k$  são utilizadas apenas nas camadas de elementos do PL que equivalem à primeira camada de elementos do PG. No restante do domínio local usam-se funções  $C^0$  e, desta forma,



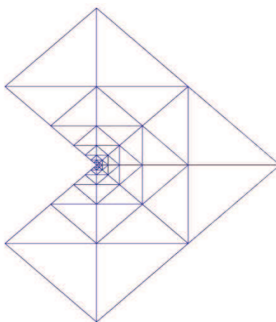
**Figura 4.3:** (a) Malha MA1 sem zona *buffer* e (b) Malha MA2 com zona *buffer*, em que a zona *buffer* equivale a uma camada de elementos da malha global grosseira (ver Figura 4.2).



**Figura 4.4:** (a) Malha MB1 sem zona *buffer* e (b) Malha MB2 com zona *buffer*, em que a zona *buffer* equivale a uma camada de elementos da malha global grosseira (ver Figura 4.2).



**Figura 4.5:** (a) Malha MC1 sem zona *buffer* e (b) Malha MC2 com zona *buffer*, em que a zona *buffer* equivale a uma camada de elementos da malha global grosseira (ver Figura 4.2).



**Figura 4.6:** Malha geométrica utilizada nas malhas MB, MC e de Referência.



há uma camada de elementos do domínio local com funções de transição  $C^k-C^0$ . Para construir estas funções, as funções de forma de elementos finitos são consideradas como funções peso e são acopladas às funções suaves através da fórmula de Shepard (Equação (2.50)), como sugerido por [51].

d) Análise Ck3: são usadas funções  $C^k$  em todas as camadas de elementos do domínio local, exceto na última, onde usam-se funções de transição  $C^k-C^0$ .

Com o intuito de minimizar os erros de integração numérica, a quadratura de integração aplicada nos elementos foi a quadratura simétrica de Wandzura em triângulos [80], com 175 pontos. A mesma quadratura foi usada no MEFG- $C^k$  e no MEFG- $C^0$  com o objetivo de comparação. Para integrações no contorno de Neumann foi usada a quadratura de Gauss-Legendre com 25 pontos, em cada aresta elementar.

A fim melhorar o condicionamento da matriz de rigidez e torná-la não singular, são aplicados o pré condicionamento proposto por Duarte e o procedimento iterativo de Babuska [37], respectivamente, cujo parâmetro de perturbação é considerado como  $1 \times 10^{-9}$ , com tolerância de convergência igual a  $1 \times 10^{-10}$ . A singularidade da matriz de rigidez no MEFG- $C^0$  ocorre porque a  $PU$  e o enriquecimento são polinomiais, gerando uma base de funções linearmente dependente, o que conduz a matrizes de rigidez singulares por construção. Isto não ocorre no MEFG- $C^k$ , mas seguindo os trabalhos de [11, 12], o mesmo procedimento é utilizado para aproximações suaves com  $PU C^k$ . Nas interfaces entre o problema global e local utiliza-se o método da penalidade, devido à sua simplicidade e generalidade para impor condições de contorno de Cauchy, com a vantagem de não levar a equações ou incógnitas extras.

Para o problema elastoplástico, a resposta irreversível e os efeitos de encruamento do material foram representados pela teoria da plasticidade  $J_2$  independente de taxa com encruamento isotrópico linear e critério de escoamento de von Mises. O problema não linear foi re-

solvido utilizando-se o esquema iterativo de Newton-Raphson e como critério de tolerância foi utilizada a norma relativa do resíduo, com relação ao valor inicial no início de cada passo de carga. A tolerância adotada para a convergência de Newton-Raphson foi  $10^{-4}$ .

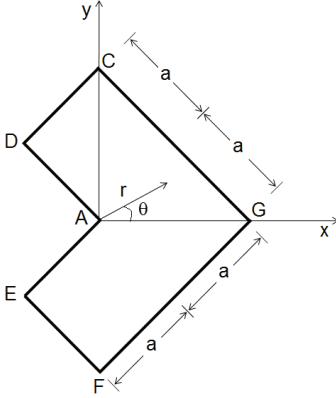
As análises foram realizadas para estado plano de deformações, considerando-se apenas carregamento monotônico e a cinemática de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

O desenvolvimento do método proposto foi realizado a partir de um programa de MEFG- $C^k$ , para análise elástica linear, já desenvolvido por Diego A. Torres durante seu trabalho de tese [14]. Suas análises foram realizadas para estado plano de tensões e deformações, com malha de elementos finitos triangulares de três nós (o mesmo tipo de elemento do presente trabalho). Foram usadas funções de enriquecimento descontínuas (no caso de simulação de trincas) e singulares convencionais e a  $PU$  foi construída a partir de funções de aresta exponenciais.

A energia de deformação  $U(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) l_z dx dy$ , foi usada como uma medida de convergência global para verificar a implementação numérica e realizar as comparações propostas. A medida de erro relativo para a energia de deformação, por exemplo, foi calculada como  $e_r(U) = \frac{U(u_{ex}) - U(u_{ap})}{U(u_{ex})}$ , em que  $U(u_{ex})$  é o valor exato (ou de referência) e  $U(u_{ap})$  é o valor aproximado da energia de deformação. Nos problemas globais (inicial e enriquecido) foi utilizado grau  $b = 1$  uniforme, a fim de tentar isolar o efeito do enriquecimento global-local no problema global enriquecido (PGE). No PL o grau  $b$  variou entre 1 e 3.

## 4.1 Domínio formato L: Análise elástica

Este primeiro exemplo estuda um problema bidimensional elástico de domínio com formato L. As dimensões do PG, e os parâmetros do material utilizados nesta análise são mostrados na Figura 4.7. Forças de superfície aplicadas nas arestas CD, CG, FE e FG foram calculadas de acordo com as componentes de tensões correspondentes aos termos



Dimensão do domínio:  $a = 100$  mm  
 Espessura unitária: 1 mm  
 Módulo de Young:  $E = 210$  GPa  
 Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$

Propriedades elasto-plásticas:

Tensão de escoamento:  $\sigma_y = 620$  MPa  
 Módulo plástico:  $H' = 10,5$  GPa

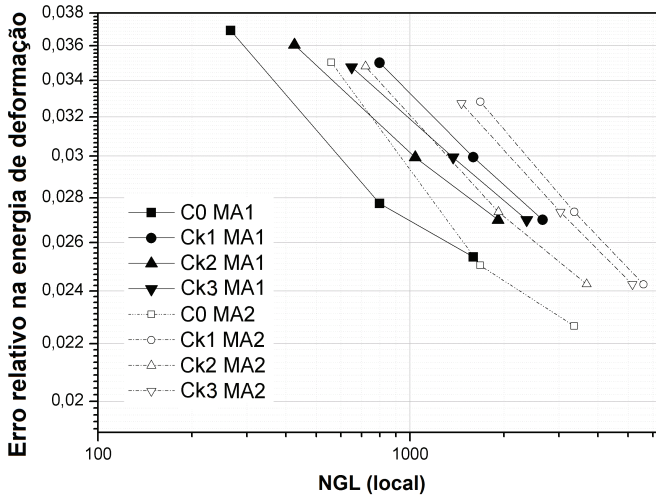
**Figura 4.7:** Domínio formato L. Dimensões do problema e propriedades do material.

de Modo I da expansão assintótica do campo de deslocamentos [79]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= a_1 \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} [(2 - Q_1 (\lambda_1 + 1)) \cos (\lambda_1 - 1) \theta - \\
 &\quad (\lambda_1 - 1) \cos (\lambda_1 - 3) \theta] \\
 \sigma_y &= a_1 \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} [(2 + Q_1 (\lambda_1 + 1)) \cos (\lambda_1 - 1) \theta - \\
 &\quad (\lambda_1 - 1) \cos (\lambda_1 - 3) \theta] \\
 \tau_{xy} &= a_1 \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} [(\lambda_1 - 1) \operatorname{sen} (\lambda_1 - 3) \theta + \\
 &\quad Q_1 (\lambda_1 + 1) \operatorname{sen} (\lambda_1 - 1) \theta]
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que  $Q_1 = 0,543075579$ ,  $\lambda_1 = 0,544483737$  e  $a_1$  é um número real arbitrário, considerado aqui como  $a_1 = 1,0$ . A força aplicada neste problema foi multiplicada pela constante  $c = 1700$  e o parâmetro de rigidez de Cauchy  $\kappa$  foi selecionado através da Equação (2.60).

As Figuras 4.8, 4.9 e 4.10 mostram o erro relativo na energia de deformação contra o número de graus de liberdade das discretizações dos problemas locais, para as análises com as malhas locais MA, MB e MC, (1) com zona *buffer* e (2) sem zona *buffer*. Foram utilizados apenas os graus de liberdade dos problemas locais porque nos problemas globais os valores não variam, como pode ser verificado na Tabela 4.1,

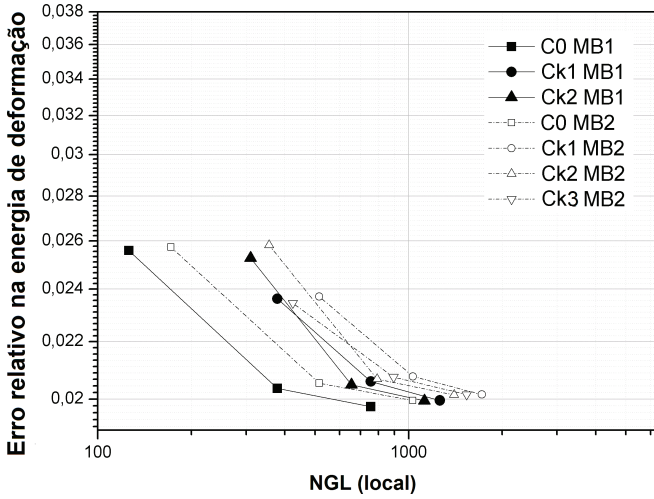


**Figura 4.8:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação, para a malha MA (MA1: sem zona *buffer*; MA2 com zona *buffer*).

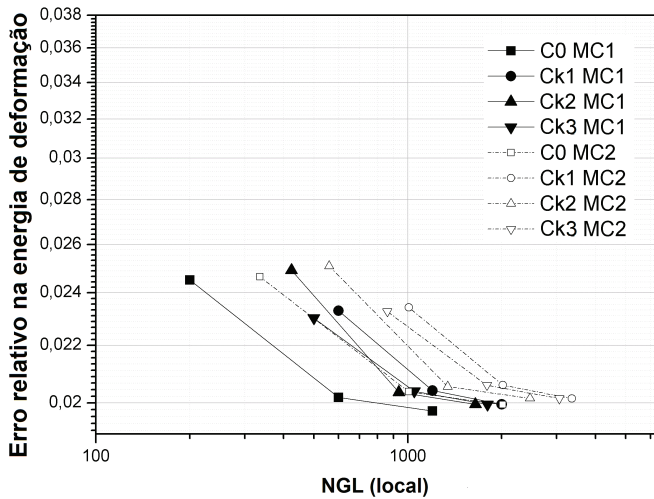
por exemplo. Nas figuras, as curvas de linhas contínuas são das análises sem zona *buffer* e de linhas tracejadas das análises com zona *buffer*.

Para a malha MA, pode-se observar uma tendência de convergência algébrica, considerando-se que a fonte dominante do erro está na vizinhança do vértice reentrante, já que a malha MA não é geométrica. Além disso, taxas de convergência maiores ocorrem para MA2 (com zona *buffer*) e para as análises Ck. Para as malhas MB e MC, observam-se taxas de convergência bem semelhantes nos casos com ou sem zona *buffer*. Note que, para a malha MB1 as análises Ck2 e Ck3 representam a mesma situação, por este motivo o caso Ck3 MB1 não aparece na Figura 4.9. Comparando-se o número de graus de liberdade utilizados nas análises, verificam-se erros menores para o caso C0.

Com relação às análises Ck (análises Ck1, Ck2 e Ck3), levando-se em consideração o número de graus de liberdade empregados, em geral os menores erros ocorrem para o caso Ck2, que utiliza menos funções  $C^k$ , o que sugere a aplicação das funções suaves apenas em regiões



**Figura 4.9:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação, para a malha MB (MB1: sem zona *buffer*; MB2 com zona *buffer*).



**Figura 4.10:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação, para a malha MC (MC1: sem zona *buffer*; MC2 com zona *buffer*).

convenientes do modelo.

A partir daqui, serão discutidos apenas os resultados obtidos com as malhas locais MA1 e MC1, considerando-se que as respostas das análises com ou sem zona *buffer* apresentaram-se semelhantes. Os resultados obtidos com a malha MB1 não são discutidos porque ficaram próximos aos da malha MC1, além disso, a última tem qualidade superior.

Como foi utilizado apenas grau  $b = 1$  no problema global inicial (PGI) e no PGE e que o número de graus de liberdade de ambos os problemas são os mesmos para quaisquer análises (C0 ou Ck), optou-se por comparar os resultados obtidos com a variação de  $b$  no PL.

As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam números de graus de liberdade (NGL) para os problemas global inicial, local e global enriquecido, além dos valores de energia de deformação total e da primeira camada de elementos (na vizinhança do ponto reentrante) do PGE, para os resultados obtidos com as malhas locais MA1 e MC1, respectivamente. De acordo com os valores da tabela, são aumentados apenas 16 graus de liberdade do PGI para o PGE, desde que oito nós globais recebem enriquecimento global-local, aumentando apenas dois graus de liberdade por nó enriquecido. Os valores da energia de deformação da solução analítica e da solução de referência estão bastante próximos, com um erro relativo de apenas 0,011%. No entanto, o valor obtido apenas com o PGI apresenta um erro relativo de 7,92%, enquanto que para o PGE os valores do erro variam entre 1,97% e 3,69%.

Embora os resultados obtidos com o  $\text{MEFG}^{gl-C0}$  se aproximem mais do valor analítico com o aumento do grau  $b$  quando comparados com o  $\text{MEFG}^{gl-Ck}$ , em ambas as situações (MA1 e MC1), em geral os resultados obtidos pelo  $\text{MEFG}^{gl-Ck}$  são melhores para o grau  $b = 1$ . Este resultado corrobora com o de [15] e indica uma habilidade das funções suaves para baixos graus de aproximação.

Nos resultados da Tabela 4.2 pode-se perceber que para  $b = 1$ , mesmo que a energia de deformação total apresente um erro menor com o  $\text{MEFG}^{gl-Ck}$ , a energia de deformação na primeira camada de

**Tabela 4.1:** Resultados referentes à malha MA1: número de graus de liberdade (NGL) e valores de energia de deformação total (U) e da primeira camada de elementos (L1)

Problema	$b$	NGL PGI	NGL PL	NGL PGE	U(u)	U(u) <sub>L1</sub>
C0	1	192	266	208	$8,2945 \times 10^3$	$1,3264 \times 10^3$
Ck1	1	192	798	208	$8,3112 \times 10^3$	$1,3284 \times 10^3$
Ck2	1	192	426	208	$8,3021 \times 10^3$	$1,3274 \times 10^3$
Ck3	1	192	526	208	$8,3132 \times 10^3$	$1,3319 \times 10^3$
C0	2	192	798	208	$8,3737 \times 10^3$	$1,3509 \times 10^3$
Ck1	2	192	1596	208	$8,3548 \times 10^3$	$1,3444 \times 10^3$
Ck2	2	192	1308	208	$8,3548 \times 10^3$	$1,3448 \times 10^3$
Ck3	2	192	1188	208	$8,3548 \times 10^3$	$1,3444 \times 10^3$
C0	3	192	1596	208	$8,3939 \times 10^3$	$1,3579 \times 10^3$
Ck1	3	192	2660	208	$8,3802 \times 10^3$	$1,3529 \times 10^3$
Ck2	3	192	1916	208	$8,3801 \times 10^3$	$1,3529 \times 10^3$
Ck3	3	192	2116	208	$8,3801 \times 10^3$	$1,3529 \times 10^3$
Analítico	-	-	-	-	$8,6126 \times 10^3$	$1,4927 \times 10^3$
Referência	4	7520	-	-	$8,6116 \times 10^3$	$1,4923 \times 10^3$
PGI	1	192	-	-	$7,9303 \times 10^3$	$1,1635 \times 10^3$

**Tabela 4.2:** Resultados referentes à malha MC1: número de graus de liberdade (NGL) e valores de energia de deformação total (U) e da primeira camada de elementos (L1)

Problema	$b$	NGL PGI	NGL PL	NGL PGE	U(u)	U(u) <sub>L1</sub>
C0	1	192	200	208	$8,4015 \times 10^3$	$1,3659 \times 10^3$
Ck1	1	192	600	208	$8,4120 \times 10^3$	$1,3638 \times 10^3$
Ck2	1	192	424	208	$8,3980 \times 10^3$	$1,3620 \times 10^3$
Ck3	1	192	500	208	$8,4144 \times 10^3$	$1,3680 \times 10^3$
C0	2	192	600	208	$8,4388 \times 10^3$	$1,3710 \times 10^3$
Ck1	2	192	1200	208	$8,4368 \times 10^3$	$1,3708 \times 10^3$
Ck2	2	192	936	208	$8,4373 \times 10^3$	$1,3715 \times 10^3$
Ck3	2	192	1050	208	$8,4370 \times 10^3$	$1,3710 \times 10^3$
C0	3	192	1200	208	$8,4427 \times 10^3$	$1,3724 \times 10^3$
Ck1	3	192	2000	208	$8,4408 \times 10^3$	$1,3718 \times 10^3$
Ck2	3	192	1648	208	$8,4407 \times 10^3$	$1,3718 \times 10^3$
Ck3	3	192	1800	208	$8,4408 \times 10^3$	$1,3719 \times 10^3$
Analítico	-	-	-	-	$8,6126 \times 10^3$	$1,4927 \times 10^3$
Referência	4	7520	-	-	$8,6116 \times 10^3$	$1,4923 \times 10^3$
PGI	1	192	-	-	$7,9303 \times 10^3$	$1,1635 \times 10^3$

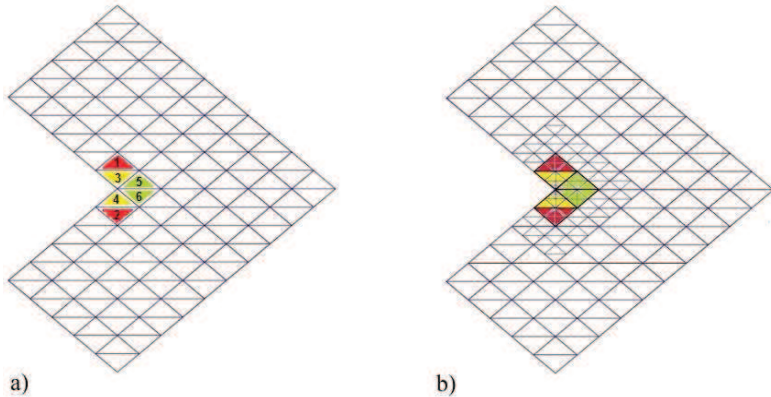


**Tabela 4.3:** Resultados referentes à malha MC1: valores de energia de deformação da primeira camada de elementos, grau local  $b = 1$

Elementos	Regulatividade	$U(u)_{ref}$	$U(u)_{aprox}$	Erro relativo
1 e 2	C0	$1,7357 \times 10^2$	$1,3214 \times 10^2$	$2,3871 \times 10^{-1}$
	Ck1	$1,7357 \times 10^2$	$1,3125 \times 10^2$	$2,4379 \times 10^{-1}$
	Ck2	$1,7357 \times 10^2$	$1,3137 \times 10^2$	$2,4314 \times 10^{-1}$
	Ck3	$1,7357 \times 10^2$	$1,3385 \times 10^2$	$2,2884 \times 10^{-1}$
3 e 4	C0	$3,5370 \times 10^2$	$3,5535 \times 10^2$	$-4,6635 \times 10^{-3}$
	Ck1	$3,5370 \times 10^2$	$3,5083 \times 10^2$	$8,1259 \times 10^{-3}$
	Ck2	$3,5370 \times 10^2$	$3,4882 \times 10^2$	$1,3806 \times 10^{-2}$
	Ck3	$3,5370 \times 10^2$	$3,4939 \times 10^2$	$1,2200 \times 10^{-2}$
5 e 6	C0	$2,1889 \times 10^2$	$1,9546 \times 10^2$	$1,0704 \times 10^{-1}$
	Ck1	$2,1889 \times 10^2$	$1,9983 \times 10^2$	$8,7114 \times 10^{-2}$
	Ck2	$2,1889 \times 10^2$	$2,0083 \times 10^2$	$8,2535 \times 10^{-2}$
	Ck3	$2,1889 \times 10^2$	$2,0075 \times 10^2$	$8,2903 \times 10^{-2}$

elementos tem um erro maior comparado com a resposta obtida pelo  $MEFG^{gl-C0}$  (ver análise Ck1). Para entender esta situação, na Tabela 4.3 faz-se um estudo dos valores de energia de deformação para cada elemento global da primeira camada de elementos, comparando-os com o valor de referência. Neste caso, a malha local utilizada foi a MC1. A numeração dos elementos pode ser observada na Figura 4.11(a).

Percebe-se que os elementos 1 e 2 (vermelhos) apresentam o maior erro dentre os demais, talvez pela quantidade de elementos locais aninhados a ele, que é menor quando comparada à quantidade nos outros elementos da primeira camada de elementos (ver Figura 4.11-b). Além disso, os valores de erro destes elementos obtidos pelo  $MEFG^{gl-C0}$  e pelo  $MEFG^{gl-Ck}$  são próximos. Nos elementos 5 e 6 (verdes), o erro obtido pelo  $MEFG^{gl-Ck}$  é menor. E nos elementos 3 e 4 (amarelos) o  $MEFG^{gl-Ck}$  produz um erro maior do que o obtido com o  $MEFG^{gl-C0}$ . No entanto, nestes elementos os valores da energia de deformação obtidos pelo  $MEFG^{gl-C0}$  ultrapassam o valor de referência, diferente dos demais resultados, elevando o valor da energia de deformação na ca-



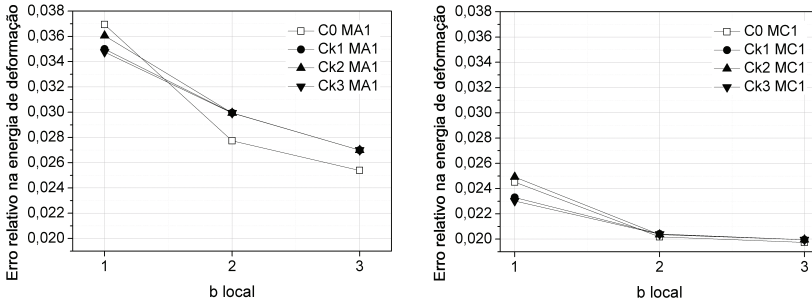
**Figura 4.11:** (a) Elementos da malha global em destaque: i) vermelhos: 1 e 2; ii) amarelos: 3 e 4; iii) verdes: 5 e 6. (b) Malha local MC1 aninhada à malha global.

mada de elementos dos mesmos. Isto leva a uma falsa impressão de que os resultados obtidos pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$  são melhores do que os obtidos pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$ .

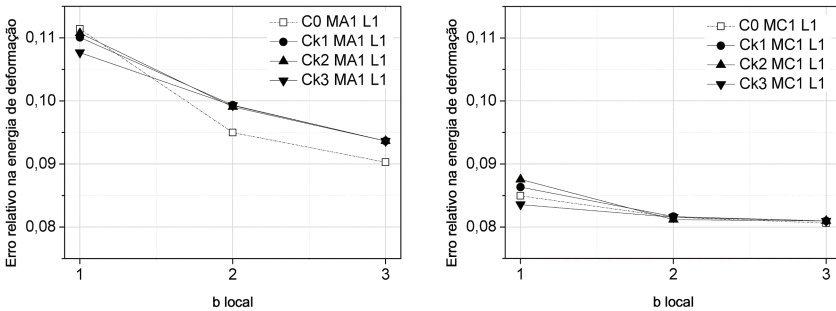
A seguir, são apresentados os valores de erros relativos na energia de deformação global (Figura 4.12) e locais por camadas de elementos (Figuras 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17) contra o grau de aproximação  $b$  dos problemas locais, para as análises com as malhas locais MA1 e MC1.

Como poder-se-ia esperar, os valores de erro diminuem na medida em que o grau  $b$  aumenta e quando se usa a malha com refino geométrico. Em todos os casos com a malha MC1, o erro obtido pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$  e pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  são bem semelhantes para  $b > 1$ , diferente dos casos com a malha MA1 em que há uma diferença maior entre os valores de erro.

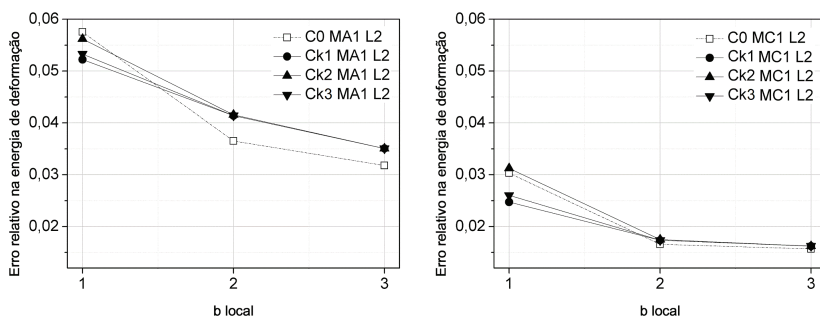
Para  $b = 1$  é visível que, dentre as respostas obtidas pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$ , os maiores valores de erro ocorrem para a análise Ck2. Este resultado pode estar associado ao fato da zona de transição  $C^k-C^0$  do PL estar numa localização equivalente à região de enriquecimento do PG, onde se encontram os nós que recebem enriquecimento, o que pode



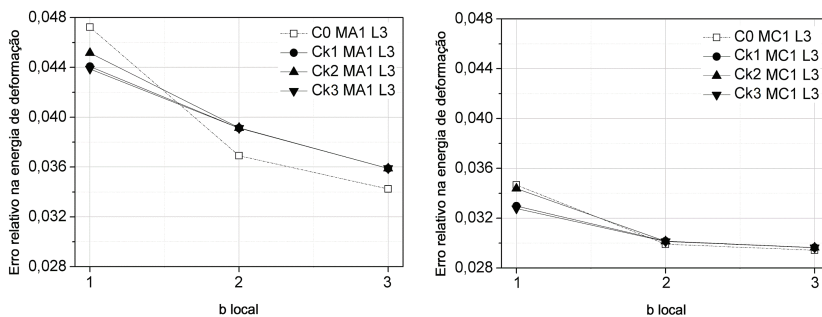
**Figura 4.12:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação total do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ .



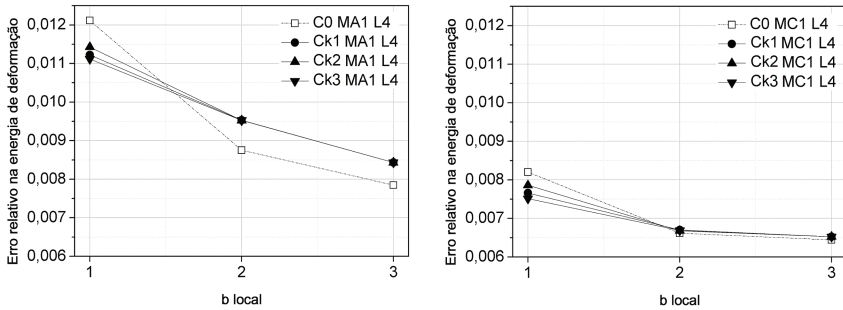
**Figura 4.13:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da primeira camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ .



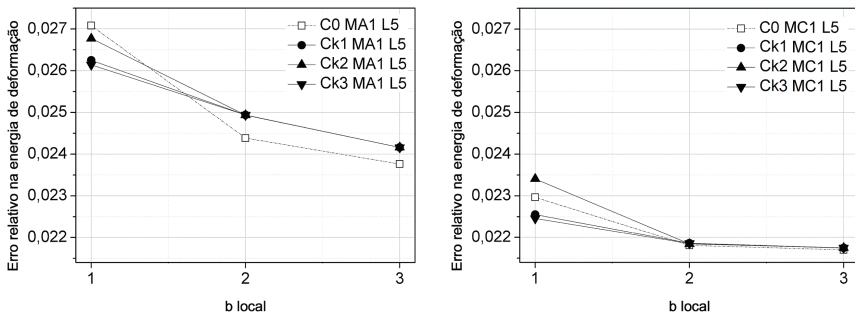
**Figura 4.14:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da segunda camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ .



**Figura 4.15:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da terceira camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ .



**Figura 4.16:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da quarta camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ .



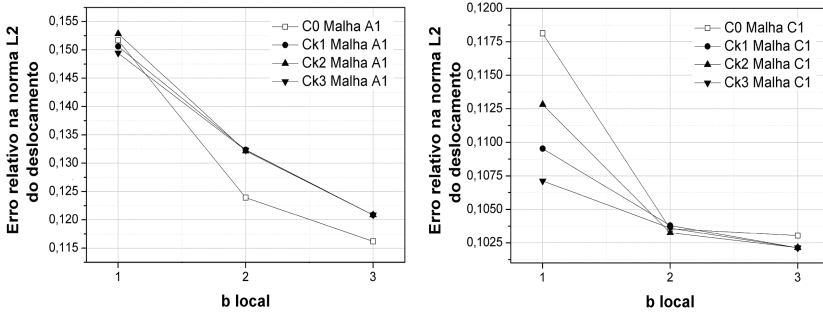
**Figura 4.17:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da quinta camada de elementos do PGE, para as malhas locais MA1 e MC1 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ .

prejudicar a aproximação para um grau de enriquecimento polinomial menor. Por outro lado, menores valores de erro ocorrem para a análise Ck3, provavelmente por causa da zona de transição  $C^k-C^0$  estar mais distante do ponto reentrante, ou seja, longe da região de solução não suave e devido à compatibilização das funções (global e local) na imposição das condições de contorno no PL. Desta forma, uma possível justificativa para Ck1 apresentar erros maiores do que Ck3 seria com relação à integração das condições de contorno, devido à incompatibilidade das funções no contorno do PL e do PGI, já que o último usa somente funções  $C^0$ . Apenas na segunda camada de elementos os menores valores de erro ocorrem para a análise Ck1. Provavelmente isto pode ser explicado ao verificar-se que a zona de transição  $C^k-C^0$  da análise Ck3 ocorre exatamente na segunda camada de elementos do PG. Para  $b > 1$  as respostas obtidas pelas análises Ck foram bem semelhantes.

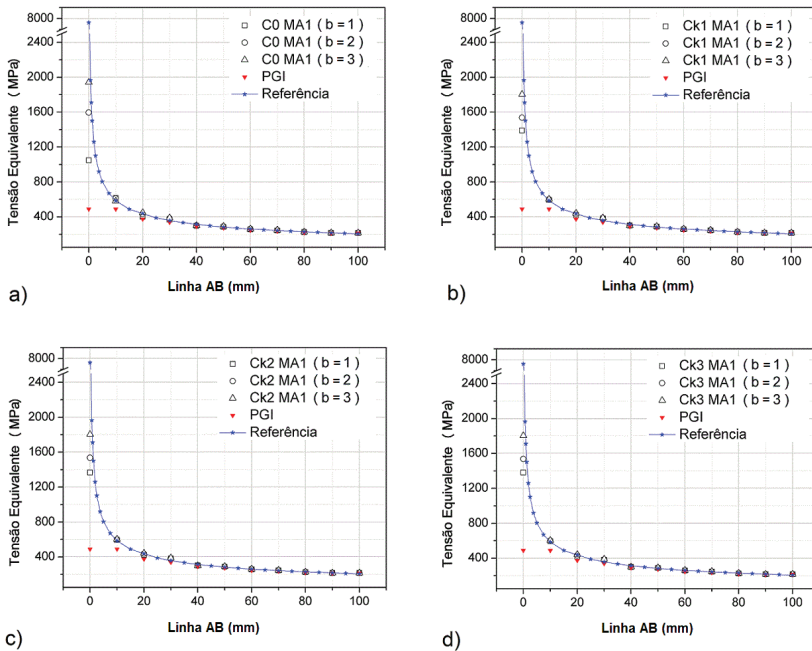
A Figura 4.18 mostra os valores de erro relativo na norma L2 do deslocamento na interface global-local do PGE. Os resultados são semelhantes aos anteriores, nos quais em geral o erro obtido quando  $b = 1$  é menor com o  $MEFG^{gl-Ck}$  e as repostas das análises Ck são bem semelhantes para  $b > 1$ . Uma diferença é que com o uso da malha local MC1, os erros obtidos por  $MEFG^{gl-Ck}$  em geral também são menores do que os obtidos por  $MEFG^{gl-C^0}$  quando  $b > 1$ .

As Figuras 4.19 e 4.20 mostram valores pontuais de tensão equivalente sobre a linha AB do PG (ver Figura 4.2(a)) com as malhas locais MA1 e MC1, respectivamente, para grau  $b = 1, 2$  e  $3$  no PL e  $b = 1$  no PGI e no PGE. Levando-se em conta que para o  $MEFG^{gl-C^0}$  realizou-se uma média dos valores obtidos nos pontos nodais, claramente o  $MEFG^{gl-C^0}$  e o  $MEFG^{gl-Ck}$  não são confrontados com o mesmo rigor. Note que, embora a solução exata seja infinita no vértice reentrante, a solução de referência é finita neste ponto, desde que ela é calculada numericamente e usa uma base polinomial de funções.

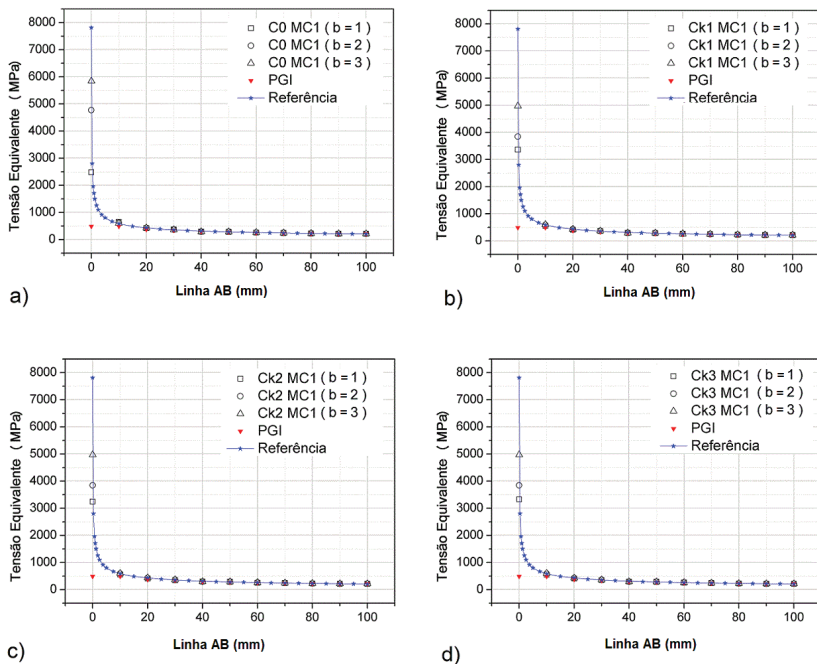
Nas figuras, pode-se observar que os valores de tensão equivalente do PGI são bem inferiores ao do PGE. Em geral, os resultados obtidos



**Figura 4.18:** Erro relativo na norma L2 do deslocamento na interface global-local do PGE para  $b = 1, 2$  e 3.



**Figura 4.19:** Valores de tensão equivalente sobre a linha AB do PGE para a malha local MA1 e grau local  $b = 1, 2$  e 3: a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3.



**Figura 4.20:** Valores de tensão equivalente sobre a linha AB do PG para a malha local MC1 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ : a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3.



pelas análises ao longo da linha são semelhantes e a diferença maior ocorre no lado esquerdo da curva, bem próximo ao vértice reentrante. Observa-se que os melhores resultados foram alcançados com valores maiores de  $b$  e com a malha local MC1, já que a malha geométrica captura melhor a singularidade, como o esperado. No entanto, os custos são reduzidos para menores valores de  $b$  e no caso de  $b = 1$ , o  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  apresenta melhores resultados quando comparado ao  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$ . Corroborando com as respostas anteriores, os piores resultados obtidos pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  para  $b = 1$  ocorreram no caso Ck2. Para os demais valores de  $b$ , as respostas são bastante semelhantes.

A Tabela 4.4 mostra os valores de deslocamentos na direção  $y$  do ponto C da malha global (ver Figura 4.2(a)) e os erros relativos obtidos pelas análises C0 e Ck3, para diferentes graus  $b$ . Os resultados são referentes às malhas locais MA1 e MC1. Também são mostradas as respostas para o PGI e para a solução de referência. Percebe-se que os valores de erro obtidos no PGI são bem superiores ao obtidos no PGE. A convergência de ambas as formas do MEFG é evidente quando o grau  $b$  aumenta, e novamente, somente para  $b = 1$  os valores obtidos pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  exibem erros menores do que os obtidos pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$ .

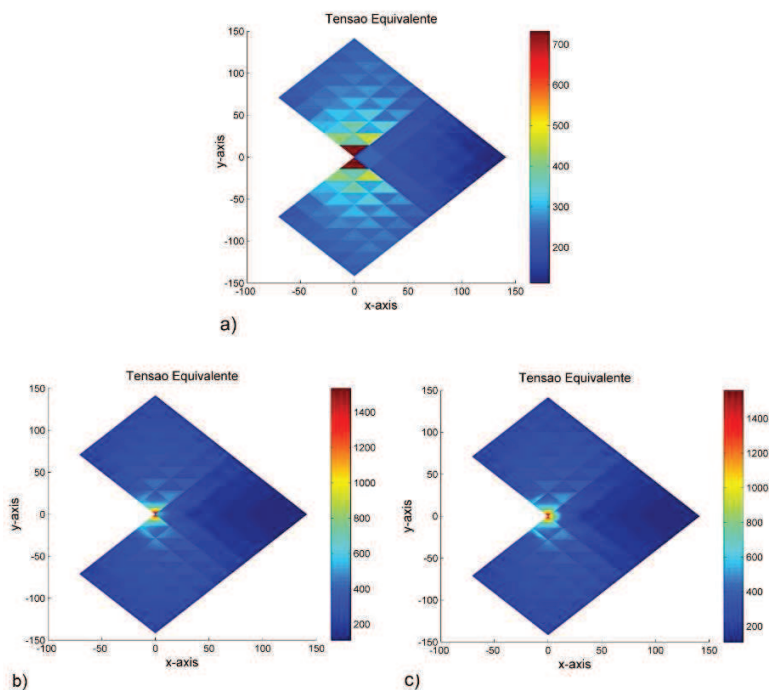
Estes resultados sugerem que o subespaço de aproximação gerado pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  é "menos flexível" do que aquele gerado pelo  $\text{MEFG}^{gl}$  clássico. Esta observação está de acordo com o entendimento de que  $C^k \subset C^0$ .

As Figuras 4.21 e 4.22 ilustram os mapas de tensões equivalentes do (a) PGI e do PGE para (b)  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$  e (c)  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  (análise Ck3) com  $b = 1$ , para as malhas locais MA1 e MC1, respectivamente. Pode-se perceber que as funções de enriquecimento global-local obtidas pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  contribuem para uma distribuição do campo de tensões mais suave do que a obtida pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$ . Isto concorda com os resultados anteriores, em que para  $b = 1$  o  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  gera melhores respostas quando comparado ao  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$ .

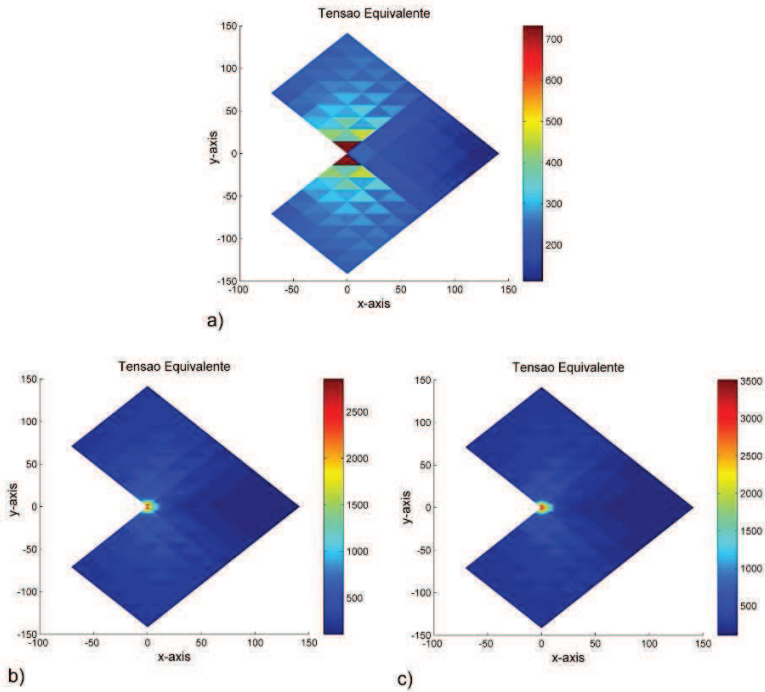
Nos resultados obtidos dos experimentos anteriores, embora os valores de erro relativo da energia de deformação total tivessem diminuí-

**Tabela 4.4:** Valores de deslocamentos na direção  $y$  (mm) do ponto C da malha global e erro relativo (entre parênteses) referentes ao PGE.

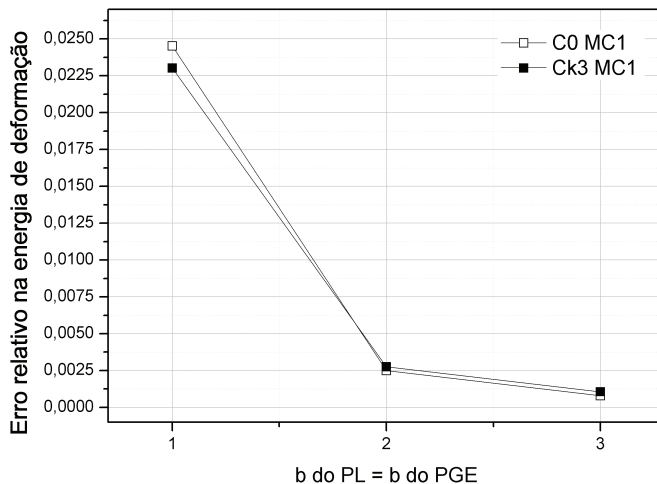
Problema	$b$ local	$u_y (e_r (u_y))$ - MA1	$u_y (e_r (u_y))$ - MC1
		Ponto C	Ponto C
C0	1	0,2342 (4,97 %)	0,23906 (3,02 %)
Ck3	1	0,2350 (4,66 %)	0,23967 (2,77 %)
C0	2	0,2375 (3,65 %)	0,2406 (2,36 %)
Ck3	2	0,2367 (3,97 %)	0,2406 (2,39 %)
C0	3	0,2383 (3,31 %)	0,2408 (2,29 %)
Ck3	3	0,2377 (3,54 %)	0,2407 (2,32 %)
PGI	1	0,2180 (11,55 %)	0,2180 (11,55 %)
Referência	4	0,2465	0,2465



**Figura 4.21:** Tensão equivalente (MPa) para grau local  $b = 1$  e malha local MA1: a) PGI; b) PGE com o MEFG<sup>gl-C0</sup>; c) PGE com o MEFG<sup>gl-Ck</sup>.



**Figura 4.22:** Tensão equivalente (MPa) para grau local  $b = 1$  e malha local MC1: a) PGI; b) PGE com o  $MEFG^{gl-C^0}$ ; c) PGE com o  $MEFG^{gl-C^k}$ .



**Figura 4.23:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação total do PGE, para a malha local MC1 e grau  $b = 1, 2$  e  $3$  para o PL e o PGE.

do de 7,92% com o PGI para valores entre 1,97% e 3,69% com o PGE, realizou-se um estudo de convergência para o  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$  e o  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$ , com a malha local MC1. Neste estudo foi mantido grau  $b = 1$  no PGI e  $b$  variando de 1 a 3 no PL e no PGE. Os resultados da Figura 4.23 mostram a convergência dos valores de energia de deformação para o valor analítico. O menor valor de erro obtido neste estudo foi 0,080%, que ficou próximo ao erro da solução de referência (0,011%), mas com apenas 34,1% dos graus de liberdade usados neste último.

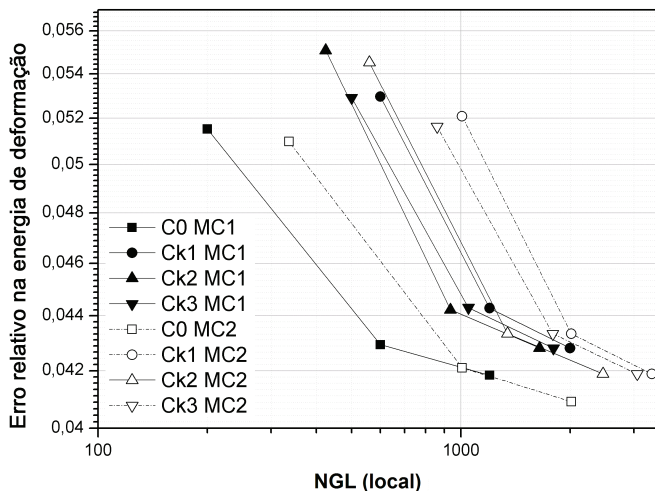
Vale ressaltar que as análises com a malha MA não representam a singularidade no vértice reentrante, nem com refinamento geométrico, nem com enriquecimento singular, o que torna os resultados pouco confiáveis, ao menos próximo à reentrância. No entanto, esta malha foi usada apenas para tentar comparar o comportamento das análises C0 e Ck numa malha pouco refinada.

## 4.2 Domínio formato L: Análise elastoplástica

Este segundo exemplo estuda um problema bidimensional elastoplástico de domínio com formato L. As dimensões do PG, e os parâmetros do material utilizados nesta análise são mostrados na Figura 4.7. Forças de superfície aplicadas nas arestas AB, BC, AF e EF foram calculadas de acordo com as componentes de tensões correspondentes aos termos de Modo I da expansão assintótica do campo de deslocamentos (Equação (4.1)). A força aplicada neste problema também foi multiplicada pela constante  $c = 1700$  e o parâmetro de rigidez de Cauchy  $\kappa$  foi selecionado através da Equação (2.60). Nesta análise, o comportamento não linear deve estar totalmente confinado no interior do domínio local, cujo tamanho é determinado de maneira que contenha a região onde a tensão de von Mises da solução do PGI seja maior do que a tensão de escoamento inicial.

O PGI foi resolvido com análise elástica e o PL com análise elastoplástica, utilizando-se apenas um incremento de carga (passo), pois considera-se a hipótese de encruamento isotrópico linear. O PGE foi resolvido por meio de processo incremental, através oito passos de carregamento (com incrementos de mesmo valor), a fim de comparar o número de iterações obtidas em cada passo com o  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$  e o  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$ . Os resultados numéricos foram comparados com uma solução de referência, na qual utilizou-se a mesma malha usada na análise elástica da Seção 4.1 (ver Figura 4.1) e um incremento na ordem polinomial do enriquecimento de modo explícito em todo o domínio ( $b = 3$ ).

Vale ressaltar que para o problema de domínio em formato L, considerando-se material elástico, uma quantidade mínima de força externa aplicada leva a um valor de tensão infinito no canto reentrante. Isto significa que para o problema físico, no caso de material elastoplástico, o critério de escoamento é alcançado desde que qualquer força externa seja aplicada. No entanto, para problemas discretizados, este fato não



**Figura 4.24:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação, para as malhas locais MC1 (sem zona *buffer*) e MC2 (com zona *buffer*). Análise elastoplástica.

é geralmente verdade.

A Figura 4.24, mostra o erro relativo na energia de deformação contra o número de graus de liberdade (NGL) das discretizações dos problemas locais, para as análises com as malhas locais MC1 (sem zona *buffer* - Figura 4.5(a)) e MC2 (com zona *buffer* - Figura 4.5(b)). Como no caso elástico, foram utilizados apenas os graus de liberdade dos problemas locais, pois os valores não variam nos problemas globais (ver Tabela 4.5, por exemplo).

De acordo com a figura, as taxas de convergência são bem semelhantes nos casos com ou sem zona *buffer*, sendo que as análises Ck apresentam taxas de convergência maiores do que as C0. Com relação as análises Ck, levando-se em consideração o número de graus de liberdade empregado, assim como no caso elástico os menores erros também ocorrem para Ck2, que utiliza menos funções  $C^k$ . Isto sugere a aplicação das funções suaves apenas em regiões convenientes do modelo.

**Tabela 4.5:** Resultados referentes à malha MC1 do problema elasto-plástico: número de graus de liberdade (NGL) e valores de energia de deformação total (U) e da primeira camada de elementos (L1)

Problema	$b$	NGL PGI	NGL PL	NGL PGE	U(u)	U(u) <sub>L1</sub>
C0	1	192	200	208	8,7701x10 <sup>3</sup>	1,5733x10 <sup>3</sup>
Ck1	1	192	600	208	8,7569x10 <sup>3</sup>	1,5588x10 <sup>3</sup>
Ck2	1	192	424	208	8,7373x10 <sup>3</sup>	1,5521x10 <sup>3</sup>
Ck3	1	192	500	208	8,7574x10 <sup>3</sup>	1,5623x10 <sup>3</sup>
C0	2	192	600	208	8,8496x10 <sup>3</sup>	1,5921x10 <sup>3</sup>
Ck1	2	192	1200	208	8,8371x10 <sup>3</sup>	1,5866x10 <sup>3</sup>
Ck2	2	192	936	208	8,8377x10 <sup>3</sup>	1,5874x10 <sup>3</sup>
Ck3	2	192	1050	208	8,8370x10 <sup>3</sup>	1,5865x10 <sup>3</sup>
C0	3	192	1200	208	8,8598x10 <sup>3</sup>	1,5957x10 <sup>3</sup>
Ck1	3	192	2000	208	8,8507x10 <sup>3</sup>	1,5916x10 <sup>3</sup>
Ck2	3	192	1648	208	8,8507x10 <sup>3</sup>	1,5916x10 <sup>3</sup>
Ck3	3	192	1800	208	8,8508x10 <sup>3</sup>	1,5916x10 <sup>3</sup>
Referência	3	4512	-	-	9,2466x10 <sup>3</sup>	1,8793x10 <sup>3</sup>
PGI	1	192	-	-	7,9303x10 <sup>3</sup>	1,1635x10 <sup>3</sup>

Comparando-se o número de graus de liberdade utilizados nas análises, verificam-se erros menores para o caso C0.

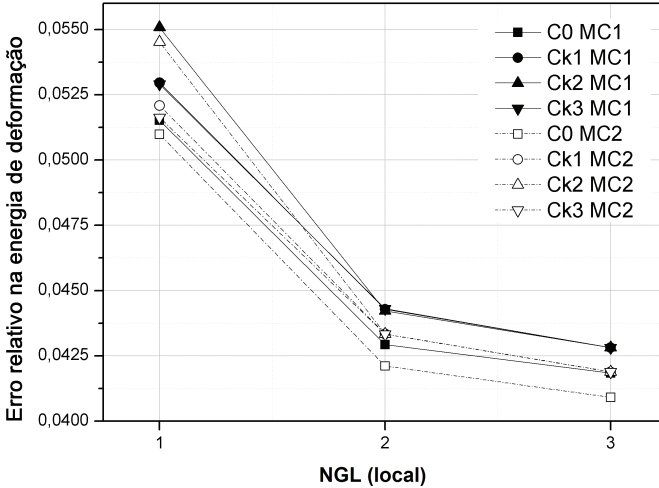
Assim como no problema elástico, utilizou-se grau  $b = 1$  no PGI e no PGE e no PL  $b$  variou entre 1 e 3. Novamente considerando-se que o número de graus de liberdade de ambos os problemas são os mesmos para quaisquer análises (C0 ou Ck), optou-se por comparar os resultados obtidos com a variação do grau  $b$  no PL.

As Tabelas 4.5 e 4.6 apresentam números de graus de liberdade para os problemas global inicial, local e global enriquecido, além dos valores de energia de deformação total e da primeira camada de elementos (na vizinhança do vértice reentrante) do PGE, para os resultados obtidos com as malhas locais MC1 e MC2, respectivamente. Observa-se que são aumentados apenas 16 graus de liberdade do PGI para o PGE, desde que oito nós globais recebem enriquecimento global-local e cada um contém dois graus de liberdade.

**Tabela 4.6:** Resultados referentes à malha MC2 do problema elasto-plástico: número de graus de liberdade (NGL) e valores de energia de deformação total (U) e da primeira camada de elementos (L1)

Problema	$b$	NGL PGI	NGL PL	NGL PGE	U(u)	U(u) $_{L1}$
C0	1	192	336	208	$8,7751 \times 10^3$	$1,5772 \times 10^3$
Ck1	1	192	1008	208	$8,7650 \times 10^3$	$1,5645 \times 10^3$
Ck2	1	192	560	208	$8,7425 \times 10^3$	$1,5554 \times 10^3$
Ck3	1	192	860	208	$8,7692 \times 10^3$	$1,5668 \times 10^3$
C0	2	192	1008	208	$8,8572 \times 10^3$	$1,5974 \times 10^3$
Ck1	2	192	2016	208	$8,8459 \times 10^3$	$1,5927 \times 10^3$
Ck2	2	192	1344	208	$8,8459 \times 10^3$	$1,5932 \times 10^3$
Ck3	2	192	1794	208	$8,8459 \times 10^3$	$1,5926 \times 10^3$
C0	3	192	2016	208	$8,8683 \times 10^3$	$1,6017 \times 10^3$
Ck1	3	192	3360	208	$8,8593 \times 10^3$	$1,5975 \times 10^3$
Ck2	3	192	2464	208	$8,8592 \times 10^3$	$1,5975 \times 10^3$
Ck3	3	192	3064	208	$8,8593 \times 10^3$	$1,5975 \times 10^3$
Referência	3	4512	-	-	$9,2466 \times 10^3$	$1,8793 \times 10^3$
PGI	1	1	-	-	$7,9303 \times 10^3$	$1,1635 \times 10^3$

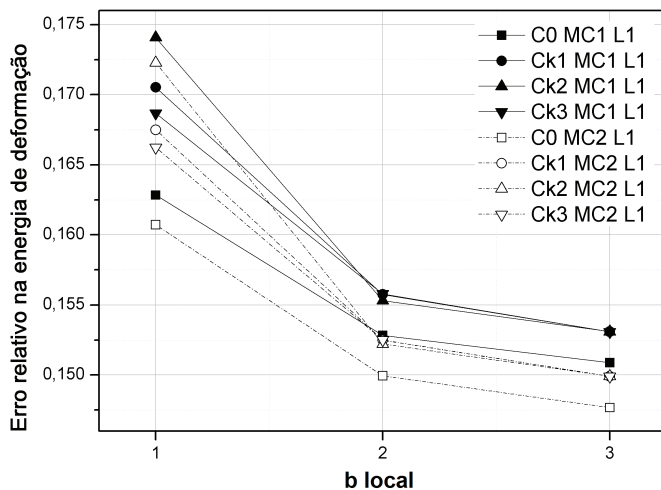




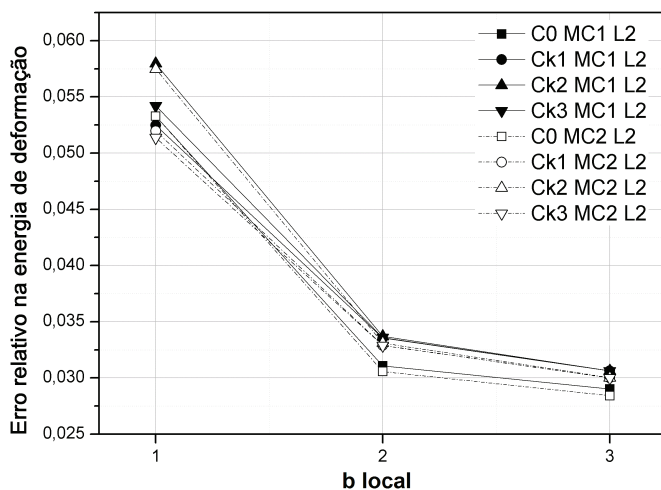
**Figura 4.25:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação total do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ . Problema elastoplástico.

De acordo com as tabelas, os valores de energia de deformação obtidos com a utilização da zona *buffer* estão mais próximos dos valores da solução de referência, quando comparados com aqueles obtidos sem a zona *buffer*. Corroborando com o caso elástico, os resultados obtidos com  $\text{MEFG}^{gl-C0}$  se aproximem mais do valor analítico com o crescimento do grau  $b$  quando comparado com o  $\text{MEFG}^{gl-Ck}$ . Para  $b > 1$  as respostas obtidas pelas análises Ck continuaram bem semelhantes e com valores de erro maiores quando comparados à análise C0. No entanto, o erro relativo na energia de deformação total não permanece menor para o  $\text{MEFG}^{gl-Ck}$  quando grau  $b = 1$ , conforme pode-se observar na Figura 4.25. De maneira análoga ao caso elástico, faz-se um estudo dos valores de energia de deformação em cada camada de elementos do PGE, a partir das Figuras 4.26, 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30.

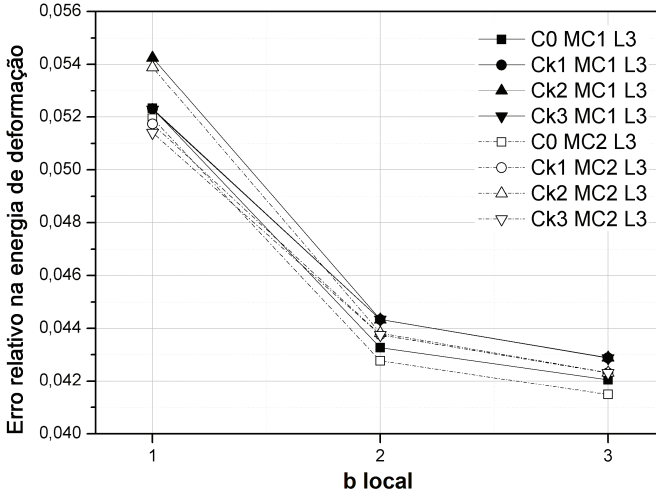
Da segunda à quinta camada de elementos, para grau  $b = 1$ , em geral os erros na energia de deformação obtidos pelas análises Ck1 e Ck3 são menores quando comparados àqueles da análise C0. No caso elástico,



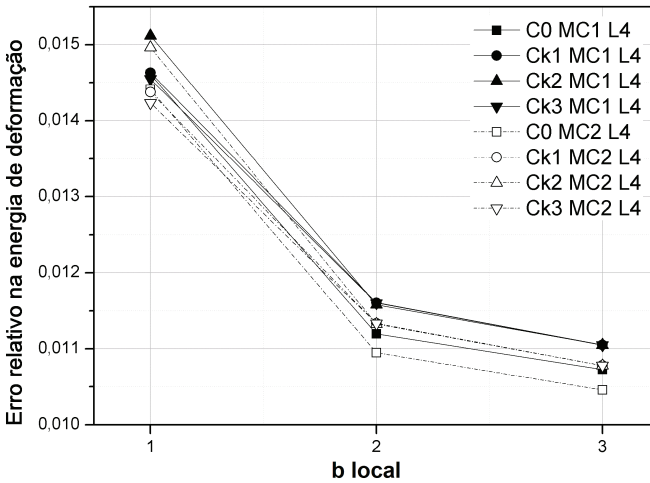
**Figura 4.26:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da primeira camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ . Problema elastoplástico.



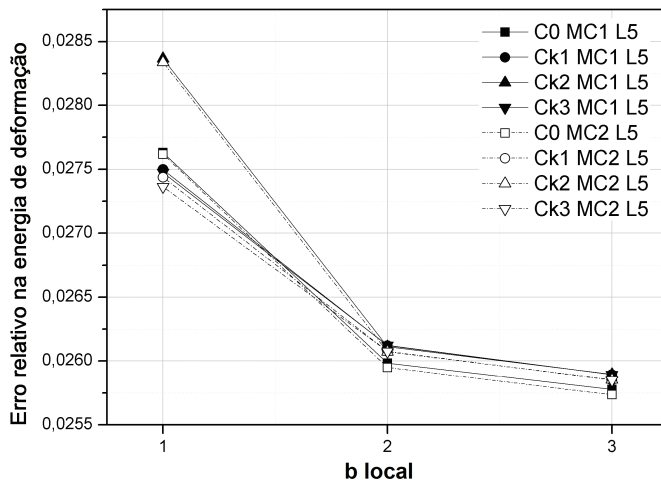
**Figura 4.27:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da segunda camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ . Problema elastoplástico.



**Figura 4.28:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da terceira camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ . Problema elastoplástico.



**Figura 4.29:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da quarta camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ . Problema elastoplástico.



**Figura 4.30:** Erro relativo no cálculo da energia de deformação da quinta camada de elementos do PGE, para as malhas locais MC1 e MC2 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ . Problema elastoplástico.

este estudo foi realizado apenas com o problema sem zona *buffer* e verificou-se que os menores valores de erro ocorrem para a análise Ck3, exceto na segunda camada de elementos onde a análise Ck1 apresenta melhores resultados. Isto também ocorre no caso elastoplástico e uma possível explicação seria porque a zona de transição  $C^k-C^0$  da análise Ck3 ocorre exatamente na segunda camada de elementos do PG. No entanto, isto não acontece no problema com zona *buffer*, ou seja, neste caso todos os menores valores de erro entre a segunda e a quinta camada de elementos e  $b = 1$  ocorrem na análise Ck3. Assim como no caso elástico, os maiores valores de erro são obtidos pela análise Ck2, o que pode estar associado à zona de transição  $C^k-C^0$  que ocorre na região de enriquecimento do PG, onde se encontram os nós que recebem enriquecimento.

Observando-se os resultados acima, para  $b = 1$ , o aumento no valor da energia de deformação total obtida com o MEF $G^{gl-C^0}$  se deve exatamente ao valor da primeira camada de elementos. Desta forma, faz-se

**Tabela 4.7:** Resultados referentes à malha MC1 do problema elastoplástico: valores de energia de deformação da primeira camada de elementos, grau local  $b = 1$

Elementos	Regul- ridade	$U(u)_{ref}$	$U(u)_{approx}$	Erro relativo
1 e 2	C0	$1,6757 \times 10^2$	$1,2495 \times 10^2$	$2,5436 \times 10^{-1}$
	Ck1	$1,6757 \times 10^2$	$1,2622 \times 10^2$	$2,4675 \times 10^{-1}$
	Ck2	$1,6757 \times 10^2$	$1,2752 \times 10^2$	$2,3898 \times 10^{-1}$
	Ck3	$1,6757 \times 10^2$	$1,2873 \times 10^2$	$2,3178 \times 10^{-1}$
3 e 4	C0	$4,8290 \times 10^2$	$4,1458 \times 10^2$	$1,4149 \times 10^{-1}$
	Ck1	$4,8290 \times 10^2$	$3,9933 \times 10^2$	$1,7306 \times 10^{-1}$
	Ck2	$4,8290 \times 10^2$	$3,9689 \times 10^2$	$1,7812 \times 10^{-1}$
	Ck3	$4,8290 \times 10^2$	$3,9880 \times 10^2$	$1,7416 \times 10^{-1}$
5 e 6	C0	$2,8917 \times 10^2$	$2,4711 \times 10^2$	$1,4545 \times 10^{-1}$
	Ck1	$2,8917 \times 10^2$	$2,5386 \times 10^2$	$1,2209 \times 10^{-1}$
	Ck2	$2,8917 \times 10^2$	$2,5165 \times 10^2$	$1,2976 \times 10^{-1}$
	Ck3	$2,8917 \times 10^2$	$2,5361 \times 10^2$	$1,2295 \times 10^{-1}$

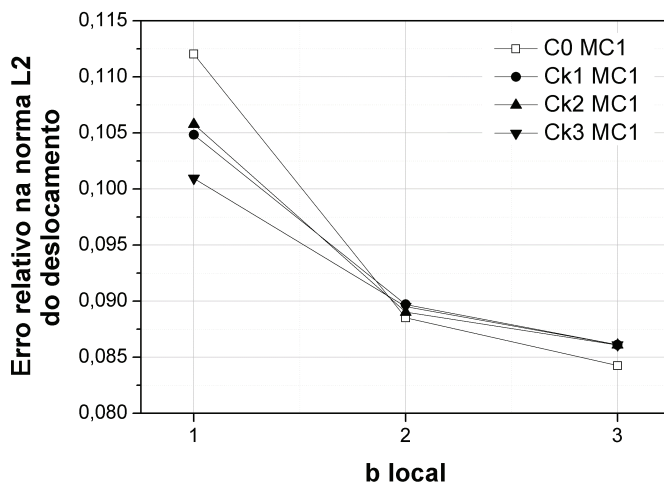
um estudo dos valores de energia de deformação para cada elemento global da primeira camada de elementos, comparando-os com o valor de referência (ver Tabelas 4.7 e 4.8). As malhas locais utilizadas foram a MC1 e a MC2 e a numeração dos elementos pode ser observada na Figura 4.11(a).

Nos elementos 1, 2 (vermelhos), 5 e 6 (verdes), o erro obtido pelo  $MEFG^{gl-Ck}$  é menor comparado ao do  $MEFG^{gl-C0}$ . E analogamente ao caso elástico, nos elementos 3 e 4 (amarelos) o  $MEFG^{gl-Ck}$  produz um erro maior do que o obtido com o  $MEFG^{gl-C0}$ . Em geral, os valores de erro nos elementos ficaram menores quando se usou a zona *buffer*, exceto nos elementos 1 e 2, justamente aqueles que apresentam o maior erro dentre os demais.

A Figura 4.31 mostra os valores de erro relativo na norma L2 do deslocamento na interface global-local do PGE, para malha local MC1. Os resultados são semelhantes aos anteriores, nos quais em geral o erro obtido quando  $b = 1$  é menor para o  $MEFG^{gl-Ck}$  e que as repostas dos casos Ck são bem semelhantes para  $b > 1$ .

**Tabela 4.8:** Resultados referentes à malha MC2 do problema elasto-plástico: valores de energia de deformação da primeira camada de elementos, grau local  $b = 1$

Elementos	Regulatividade	$U(u)_{ref}$	$U(u)_{aprox}$	Erro relativo
1 e 2	C0	$1,6757 \times 10^2$	$1,2462 \times 10^2$	$2,5629 \times 10^{-1}$
	Ck1	$1,6757 \times 10^2$	$1,2601 \times 10^2$	$2,4798 \times 10^{-1}$
	Ck2	$1,6757 \times 10^2$	$1,2675 \times 10^2$	$2,4359 \times 10^{-1}$
	Ck3	$1,6757 \times 10^2$	$1,2633 \times 10^2$	$2,4608 \times 10^{-1}$
3 e 4	C0	$4,8290 \times 10^2$	$4,1507 \times 10^2$	$1,4047 \times 10^{-1}$
	Ck1	$4,8290 \times 10^2$	$4,0090 \times 10^2$	$1,6982 \times 10^{-1}$
	Ck2	$4,8290 \times 10^2$	$3,9849 \times 10^2$	$1,7480 \times 10^{-1}$
	Ck3	$4,8290 \times 10^2$	$4,0159 \times 10^2$	$1,6838 \times 10^{-1}$
5 e 6	C0	$2,8917 \times 10^2$	$2,4893 \times 10^2$	$1,3916 \times 10^{-1}$
	Ck1	$2,8917 \times 10^2$	$2,5534 \times 10^2$	$1,1697 \times 10^{-1}$
	Ck2	$2,8917 \times 10^2$	$2,5251 \times 10^2$	$1,2679 \times 10^{-1}$
	Ck3	$2,8917 \times 10^2$	$2,5551 \times 10^2$	$1,1639 \times 10^{-1}$



**Figura 4.31:** Erro relativo na norma L2 do deslocamento na interface global-local do PGE. Problema elasto-plástico.

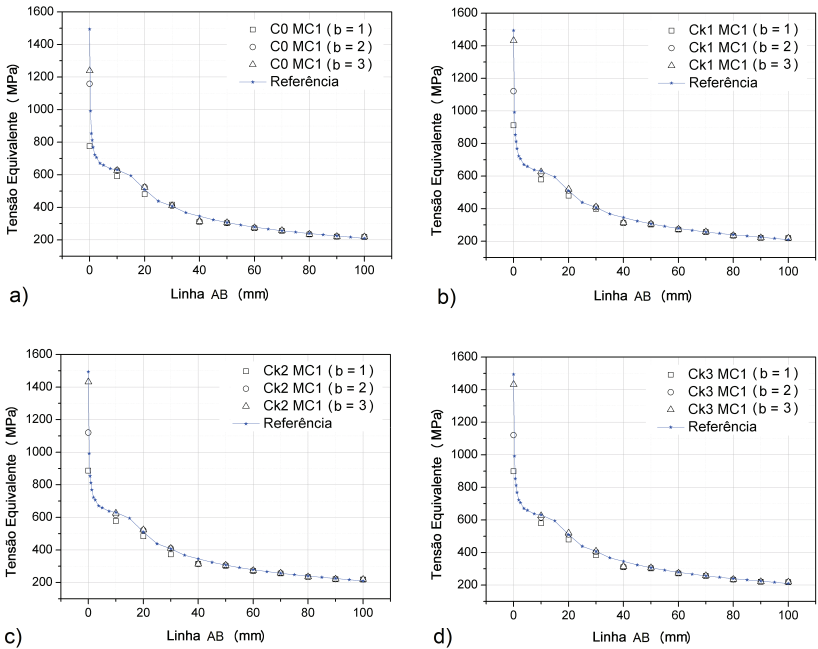
**Tabela 4.9:** Número de iterações requerido em cada passo de carga para a malha MC1 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$

Problema	Passo de carga									
	b	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
C0	1	1	3	5	6	7	8	9	11	50
Ck1	1	1	3	4	5	6	7	8	10	44
Ck2	1	1	3	4	5	6	6	8	9	42
Ck3	1	1	3	4	5	6	7	8	9	43
C0	2	2	4	5	6	7	8	9	12	53
Ck1	2	2	4	5	6	7	8	9	11	52
Ck2	2	2	4	6	7	7	8	9	11	54
Ck3	2	2	4	6	7	7	8	9	11	54
C0	3	3	4	6	7	8	8	10	12	58
Ck1	3	3	4	5	6	8	8	10	12	56
Ck2	3	3	4	5	6	8	8	10	12	56
Ck3	3	3	4	5	6	8	8	10	12	56

As Tabelas 4.9 e 4.10 listam o número de iterações do esquema de Newton-Raphson requeridos em cada passo de carga para as análises realizadas pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  e pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$ , com malhas locais MC1 e MC2, respectivamente, e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ . Observa-se que para  $b = 1$ , o número de iterações total requerido pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  é menor quando comparado ao requerido pelo  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$ . Para os outros valores de  $b$ , as tabelas indicam que o número total de iterações requeridas para os dois métodos são similares.

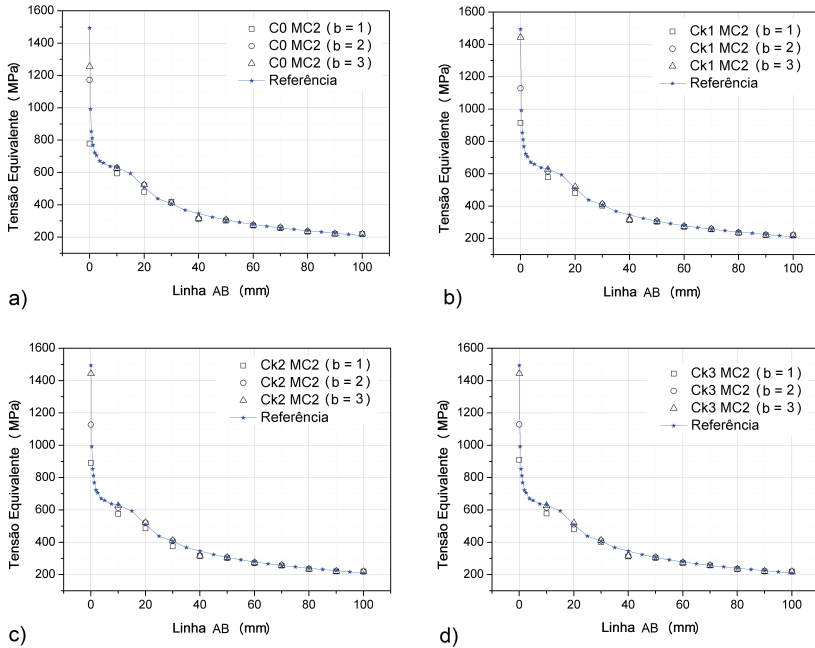
As Figuras 4.32 e 4.33 mostram valores pontuais de tensão equivalente sobre a linha AB do PG (ver Figura 4.2(a)) com as malhas locais MC1 e MC2, respectivamente, para  $b = 1, 2$  e  $3$  no PL e  $b = 1$  no PGI e no PGE. Vale lembrar que para o  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$  realizou-se uma média dos valores obtidos nos pontos nodais e desta forma, o  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$  e o  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  não são confrontados com o mesmo rigor.

Em geral, os resultados obtidos pelas análises ao longo da linha são semelhantes e a diferença maior ocorre no lado esquerdo da curva, próximo ao vértice reentrante. Além disso, os valores de tensão equivalente



**Figura 4.32:** Valores de tensão equivalente sobre a linha AB do PG para a malha local MC1 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ . Análises a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3.





**Figura 4.33:** Valores de tensão equivalente sobre a linha AB do PG para a malha local MC2 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$ . Análises a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3.

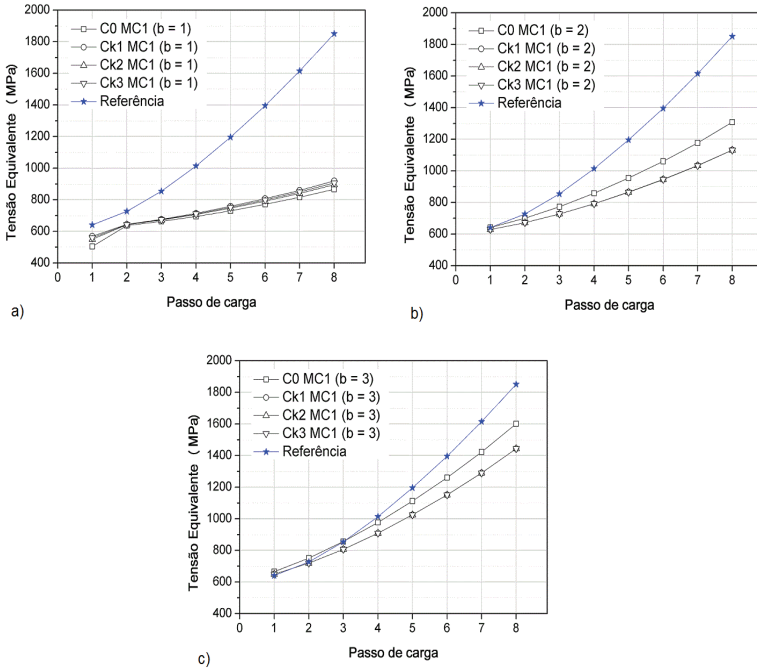
**Tabela 4.10:** Número de iterações requerido em cada passo de carga para a malha MC2 e grau local  $b = 1, 2$  e  $3$

Problema	Passo de carga									
	b	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
C0	1	1	3	5	6	7	8	9	11	50
Ck1	1	1	3	4	6	7	7	8	10	46
Ck2	1	1	3	4	5	6	7	8	9	43
Ck3	1	1	3	4	5	6	7	8	10	44
C0	2	2	4	6	7	8	8	10	12	57
Ck1	2	2	4	6	7	8	9	10	12	58
Ck2	2	2	4	6	7	8	8	10	12	57
Ck3	2	2	4	6	7	8	9	10	12	58
C0	3	3	4	6	7	8	9	10	12	59
Ck1	3	3	4	6	7	8	9	10	12	59
Ck2	3	3	4	6	7	8	9	10	12	59
Ck3	3	3	4	6	7	8	9	10	12	59

são próximos nos casos com zona *buffer* e sem zona *buffer*.

Observa-se que para  $b = 1$  os maiores valores de tensões ocorrem nas análises Ck e, diferente do caso elástico, isto também acontece para  $b = 3$ . Corroborando com os resultados anteriores, os piores valores obtidos pelo MEF $G^{gl-Ck}$  para  $b = 1$  ocorrem no caso Ck2 e os melhores no caso Ck3.

A fim de comparar valores de tensões sem usar médias, buscando confrontar os métodos com o mesmo rigor, utilizou-se um valor pontual de tensão equivalente medido no interior do elemento 3 (ver 4.11(a)), próximo à reentrância, no ponto  $(-0,0021; 0,0042)$ . As coordenadas do referido ponto são calculadas considerando que a origem do sistema de coordenadas é localizado no ponto A da Figura 4.2. A Figura 4.34 mostra os valores pontuais de tensão equivalente sobre o ponto  $(-0,0021; 0,0042)$  para os 8 passos de carga da análise não linear, utilizando-se a malha local MC1, para  $b = 1, 2$  e  $3$  no PL e  $b = 1$  no PGI e no PGE. Pode-se perceber os resultados concordam com os anteriores.



**Figura 4.34:** Valores pontuais de tensão equivalente para os oito passos de carga, com  $b$  local igual a: a) 1; b) 2; c) 3.

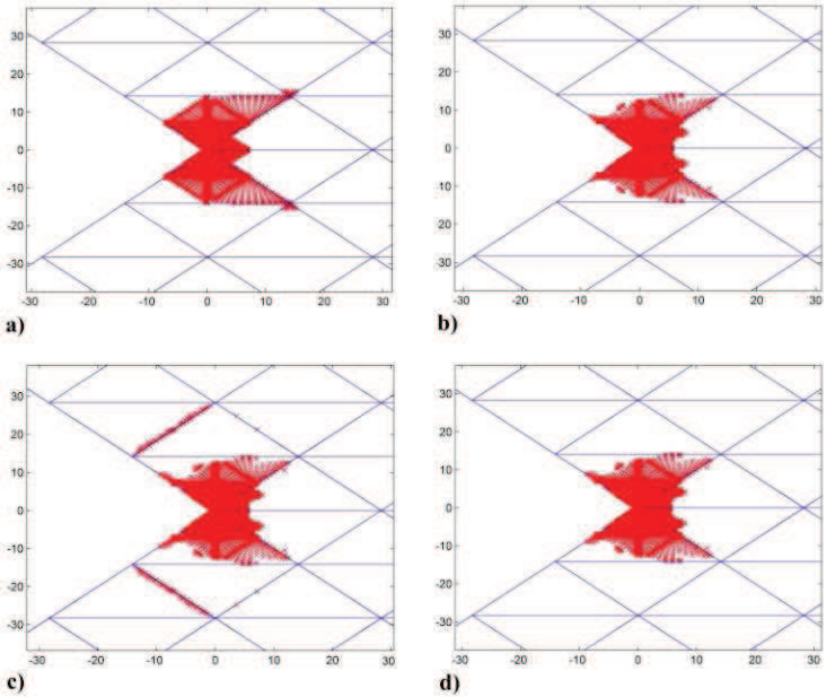
**Tabela 4.11:** Valores de deslocamentos na direção  $y$  (mm) do ponto C e erro relativo (entre parênteses) referentes ao PGE. Problema elasto-plástico.

Problema	b local	$u_y (e_r (u_y)) - \text{MC1}$	$u_y (e_r (u_y)) - \text{MC2}$
		Ponto C	Ponto C
C0	1	0,2492 (5,55 %)	0,2493 (5,50 %)
Ck3	1	0,2492 (5,54 %)	0,2495 (5,43 %)
C0	2	0,2524 (4,36 %)	0,2525 (4,29 %)
Ck3	2	0,2520 (4,49 %)	0,2522 (4,42 %)
C0	3	0,2528 (4,20 %)	0,2530 (4,12 %)
Ck3	3	0,2525 (4,31 %)	0,2527 (4,23 %)
Referência	3	0,2639	0,2639

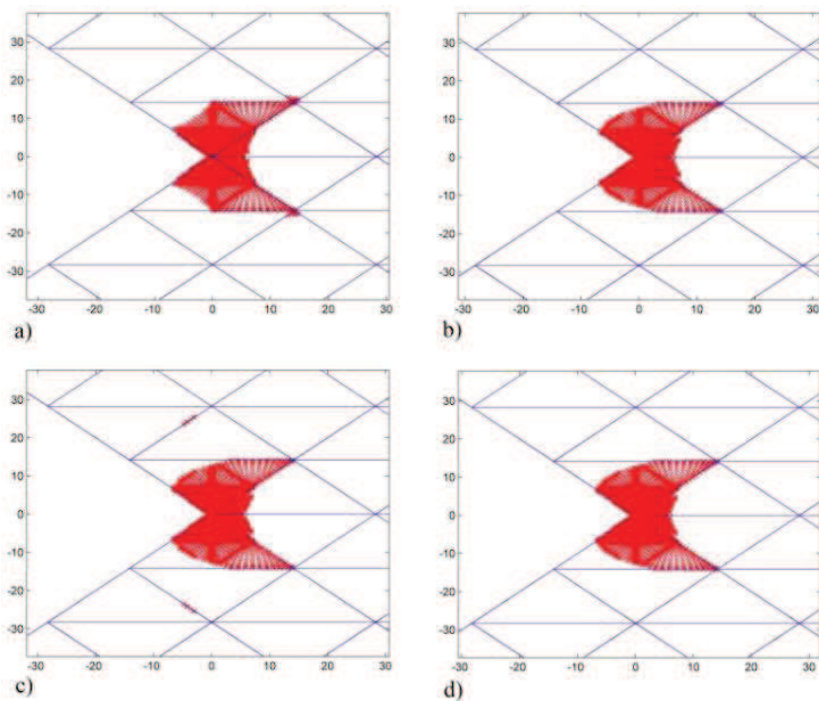
A Tabela 4.11 mostra os valores de deslocamentos (em mm) na direção  $y$  do ponto C da malha global (ver Figura 4.2(a)) e os erros relativos obtidos pelas análises C0 e Ck3, para diferentes graus  $b$ . Os resultados são referentes às malhas locais MC1 e MC2. Pode-se notar que a convergência de ambas as formas do MEF $^{gl}$  é evidente quando o grau  $b$  aumenta, e novamente, somente para  $b = 1$  os valores obtidos pelo MEF $^{gl-C^k}$  exibe erros menores do que os obtidos pelo MEF $^{gl-C^0}$ .

Alguma influência da suavidade das funções  $C^k$  também pode ser vista pelo aspecto geométrico da zona de processo, para diferentes graus  $b$ . As Figuras 4.35, 4.36 e 4.37 mostram as distribuições dos pontos de integração onde a condição de escoamento foi alcançada, para o carregamento completo, com  $b = 1, 2$  e  $3$ , respectivamente, e malha local MC1. As figuras comparam os desempenhos do MEF $^{gl-C^k}$  e MEF $^{gl-C^0}$ , considerando-se o alto gradiente do campo de deformações que ocorre na zona plástica. Os resultados sugerem uma habilidade maior das funções de aproximação com continuidade interelementar arbitrária para representar a zona de processo, quando comparada com as funções  $C^0$ , principalmente para baixos graus de aproximação  $b$  (ver solução de referência na Figura 4.38).

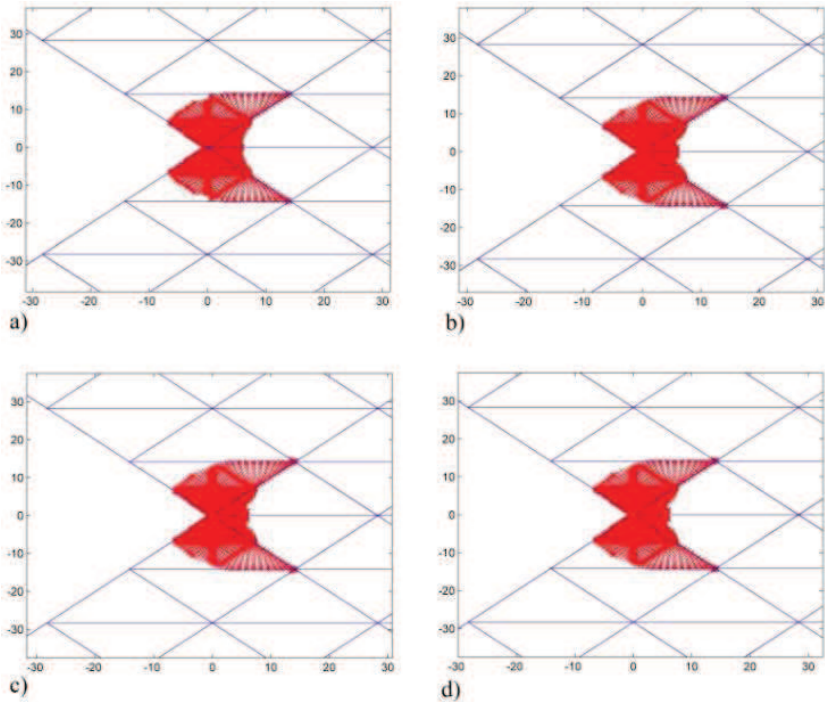
Um resultado interessante que corrobora com os anteriores é que dentre as análises Ck, a Ck2 é a que representa pior a zona de processo.



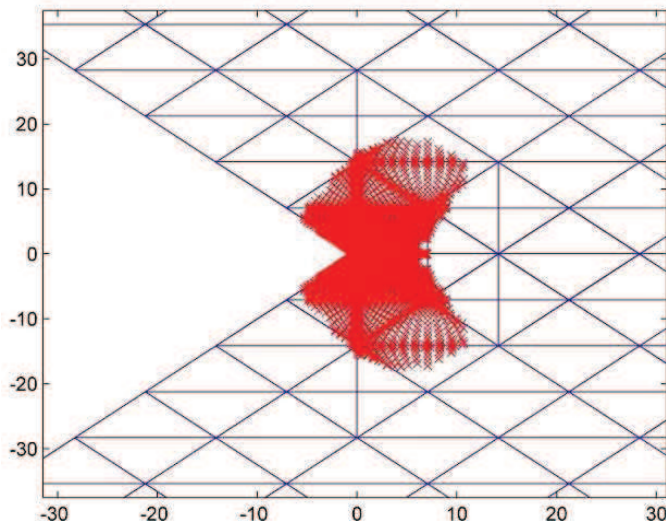
**Figura 4.35:** Pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento para grau local  $b = 1$  e malha local MC1: a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3.



**Figura 4.36:** Pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento para grau local  $b = 2$  e malha local MC1: a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3.



**Figura 4.37:** Pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento para grau local  $b = 3$  e malha local MC1: a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3.



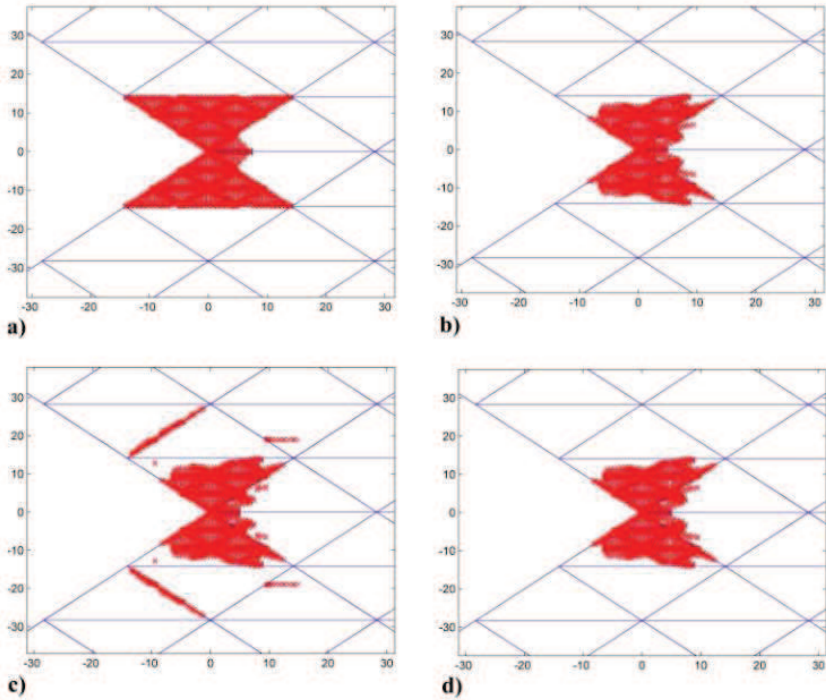
**Figura 4.38:** Solução de referência: pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento.

Percebe-se que alguns pontos de integração plastificam no entorno da primeira camada de elementos para Ck2 e este número diminui na medida em que  $b$  aumenta. Desta forma, fica fortalecida a hipótese de que os piores resultados são obtidos pela análise Ck2 porque ela apresenta uma zona de transição  $C^k-C^0$  na região de enriquecimento do PG, onde se encontram os nós que recebem enriquecimento.

A Figura 4.39 mostra as distribuições dos pontos de integração onde a condição de escoamento foi alcançada, para o carregamento completo, com grau  $b = 1$  e malha local MA1. Assim como no caso anterior, o  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  representa melhor a zona de processo (ver solução de referência na Figura 4.38), exceto para a análise Ck2.

Assim, pode ser visto que no caso de aproximações de graus mais baixos, mesmo para malhas grosseiras, o  $\text{MEFG}^{gl-C^k}$  consegue uma melhor representação da zona plástica, se comparado ao  $\text{MEFG}^{gl-C^0}$ . Neste sentido, no caso de materiais elásticos, sabe-se os padrões adequados de refino de malhas que devem ser aplicados perto desses pontos.





**Figura 4.39:** Pontos de integração cuja condição de escoamento foi alcançada no final do carregamento para grau local  $b = 1$  e malha local MA1: a) C0; b) Ck1; c) Ck2; d) Ck3.

No entanto, para outros tipos mais gerais de detalhes geométricos, ou no caso de materiais elastoplásticos, a definição de um refino de malha ótimo poderia ser uma tarefa difícil. A partir desses fatos, parece ser interessante utilizar as funções de regularidade mais elevada em torno de reentrâncias, ou outros detalhes geométricos, nos problemas elastoplásticos.



## Capítulo 5

# Considerações finais

Neste trabalho foi proposta uma abordagem para acoplar o MEFG- $C^k$  ao MEFG $^{gl}$ , o chamado MEFG $^{gl-C^k}$ , a fim de comparar seu desempenho ao do MEFG $^{gl}$  clássico. Foram modelados problemas bidimensionais lineares elásticos e elastoplásticos, que contemplam singularidade de tensões (domínio em formato L). Desta forma, a análise elastoplástica apresentou plasticidade confinada em uma pequena região do domínio global, ou seja, na vizinhança do vértice reentrante.

O MEFG $^{gl-C^k}$  foi formulado utilizando-se funções  $PU C^k$  no problema local (PL) e funções  $PU C^0$  nos problemas globais inicial e enriquecido. Assim, foram geradas funções de enriquecimento global-local a partir de funções de aproximação com continuidade interelementar  $C^k$ , com o propósito de analisar o efeito da regularidade da  $PU$  no desempenho das aproximações. Somente a solução local foi usada como enriquecimento no problema global (PG).

O PL foi enriquecido uniformemente por funções polinomiais e utilizou-se três níveis de refino de malha, sendo um regular e dois geométricos. Com relação à regularidade das funções do PL, as funções  $C^k$  foram distribuídas de três maneiras distintas nas camadas de elementos, sendo que em duas delas há uma zona de transição de funções  $C^k$  e funções  $C^0$ . Além disso, buscando-se reduzir o efeito das condições de contorno não exatas no PL, fez-se o uso de zona *buffer*.

Para medir a qualidade de aproximação dos métodos, foram usadas medidas globais e locais de erro, por exemplo, através de valores de energia de deformação global e valores pontuais de tensões. De acordo com os resultados obtidos, as principais conclusões são:

- Levando-se em consideração o número de graus de liberdade empregados, verificam-se erros menores com o uso do MEF $G^{gl}$  clássico (MEF $G^{gl-C^0}$ ). Em geral, os menores erros obtidos com o MEF $G^{gl-C^k}$  ocorrem para a análise que usa funções  $C^k$  apenas na região do PL equivalente à zona de enriquecimento do PG. Assim, considerando o maior custo na utilização da regularidade elevada, já que as funções  $C^\infty$  envolvem maior número de graus de liberdade e suas derivadas são de difícil integração, julga-se apropriada a aplicação das funções suaves apenas em regiões convenientes do modelo.

- As análises com e sem zona *buffer* em geral apresentaram taxas de convergência bem próximas, com alguma vantagem do MEF $G^{gl-C^k}$  quando comparado ao MEF $G^{gl-C^0}$ . A maior diferença apresentada para o uso ou não da zona *buffer* ocorreu com a malha local sem refino geométrico, na qual as maiores taxas foram obtidas com a utilização da zona *buffer*. No entanto, considerando que esta malha não representa bem a singularidade no vértice reentrante e foi utilizado apenas refino polinomial, tais resultados podem não ser confiáveis, ao menos próximo à reentrância.

- Considerando que o número de graus de liberdade do PG não se altera quando se utiliza o MEF $G^{gl-C^k}$  ou o MEF $G^{gl-C^0}$ , resolveu-se comparar estes dois métodos por meio da variação do grau  $b$  (o grau polinomial de reprodutibilidade da base) utilizado no PL. Ao confrontar as medidas locais e globais de qualidade da aproximação utilizadas, verifica-se que os resultados obtidos com o MEF $G^{gl-C^0}$  se aproximam mais do valor analítico (ou de referência) com o refino  $p$  (local). No entanto, os custos são reduzidos para menores valores de  $b$  e quando  $b = 1$ , o MEF $G^{gl-C^k}$  apresenta erros menores. Este resultado corrobora com o de [15] e indica uma habilidade das funções suaves para baixos graus de aproximação.

- Uma distribuição mais suave do campo de tensões (equivalentes) pode ser visualizada quando são usadas funções de enriquecimento global-local obtidas pelo MEF $G-C^k$ , para grau  $b = 1$ . Além disso, este método fornece melhores aproximações para os valores de tensões equiva-lentes, principalmente na vizinhança do vértice reentrante, quando  $b = 1$ .

- Os resultados também sugerem que a continuidade de alta ordem das funções  $C^k$  presentes no MEF $G^{gl-C^k}$ , com derivadas não constantes no interior dos elementos, possui uma habilidade maior para representar características localizadas, como a zona de processo, quando comparado ao MEF $G^{gl-C^0}$ , mesmo com malha grosseira e principalmente para baixos graus de aproximação  $b$ .

- Dentre as respostas obtidas pelo MEF $G^{gl-C^k}$  para  $b = 1$ , observa-se que os maiores valores de erro ocorrem para a análise que tem a zona de transição  $C^k-C^0$  do PL na região equivalente àquela do PG onde se encontram os nós a serem enriquecidos (análise CK2). Os menores valores de erro também ocorrem num caso em que o PL apresenta zona de transição  $C^k-C^0$ , mas esta zona fica mais distante dos nós que recebem enriquecimento (análise CK3). Uma possível justificativa para a análise que utiliza apenas funções  $C^k$  no PL (análise CK1) não apresentar os melhores resultados, pode estar associada à integração das condições de contorno, devido à incompatibilidade das funções no contorno do PL e do PGI, já que o último usa somente funções  $C^0$ . Além da análise Ck3 aproximar melhor a solução, ela apresenta um custo reduzido quando comparada à análise CK1, pois a quantidade de funções  $C^k$  utilizada é menor.

## 5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Neste trabalho, utilizou-se apenas funções de enriquecimentos polinomiais e refino de malha para representar a singularidade do problema. Desta forma, o uso das funções  $PU$  suaves no problema local ofereceu certa vantagem com relação as funções  $PU C^0$ , mas somente para o

grau  $b = 1$ . No entanto, nos resultados obtidos por [9], que além do enriquecimento polinomial, utilizou funções de enriquecimento singulares para representar a singularidade da ponta da trinca, percebeu-se uma melhor representação do enriquecimento singular com o uso de funções  $PU$  suaves.

Neste contexto, propõe-se estudar o problema em formato L utilizando-se funções de enriquecimento singulares apropriadas ao modelo [79], buscando-se investigar possíveis diferenças de precisão entre o  $MEFG^{gl}$  clássico e o  $MEFG^{gl-C^k}$ . Além deste estudo, também sugere-se modelar descontinuidades e singularidades em problemas bidimensionais da mecânica da fratura elástica linear e elastoplástica, com plasticidade confinada. Assim, o enriquecimento será realizado tanto com funções polinomiais quanto com funções de Heaviside e assintóticas (como sugerido por [47]) para o caso de discretização de trincas. As singularidades plásticas serão representadas pelos campos Hutchinson-Rice-Rosengren (HRR) [81], capazes de capturar razoavelmente deformações elastoplásticas numa concentração de tensões em problemas planos, desde que seja utilizada a relação constitutiva não linear.

Com relação à análise global-local, propõe-se a implementação de uma estratégia adaptativa para a escolha do domínio local.

A fim de reduzir custos com relação à regularidade elevada, considerando que as funções  $C^\infty$  envolvem maior número de graus de liberdade e suas derivadas são de difícil integração, sugere-se realizar estudos numéricos utilizando-se funções de aresta polinomiais, com regularidade limitada  $k$  mínima. Portanto, as funções  $PU$  resultantes serão pelo menos  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis e as funções de aproximação terão a mesma continuidade, desde que os enriquecimentos também sejam pelo menos  $C^k$ . Os trabalhos de [10] e [11] analisaram modelos de placas de Kirchhoff e Mindlin e compararam funções de aresta polinomiais (Equação (2.54)) e exponenciais (Equação (2.52)), com a utilização de enriquecimento polinomial. Seus resultados apontam que as funções mais facilmente integradas são aquelas baseadas nas funções de arestas exponenciais e polinomiais de segunda ordem.

---

Embora esta última seja restrita à continuidade  $C^1$ , ela requer menos esforço computacional e leva a uma precisão razoável.

De acordo com [5], um dos aspectos mais difíceis da modelagem numérica é validar os resultados e assegurar que um dado modelo seja adequado para um problema particular. Com base nisto, nos últimos anos, tem-se realizado esforços para desenvolver estimadores de erro a posteriori (utilizando informações obtidas durante o processo de solução do problema e dados fornecidos), que além de prover informações sobre a qualidade das soluções, guiam a análise para a redução do erro computacional. Neste sentido, sugere-se utilizar um método residual em subdomínio para calcular estimadores de erro do tipo residual livre de fluxo [82, 83, 84, 85] em análises global-local. Este método é baseado no conceito de partição da unidade e na solução de problemas em subdomínios locais, que são nuvens de elementos. A vantagem desta técnica é que não se faz necessário calcular saltos de fluxos nas interfaces dos elementos para o cálculo do resíduo, nem realizar qualquer equilíbrio de fluxo nos elementos, como proposto por [86] e utilizado por [64]. O método apresenta um embasamento matemático aceitável, bons resultados em diversos testes publicados, principalmente nos problemas planos, e possui uma estrutura de dados usual do código de elementos finitos, podendo ser facilmente adaptado à estrutura do MEFG- $C^0$  e do MEFG- $C^k$ .





# Referências

- [1] AREIAS, P. M. A.; BELYTSCHKO, T. Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 63, p. 760-788, 2005.
- [2] BELYTSCHKO, T.; MOËS, N.; USUI, S.; PARIMI, C. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, p. 993-1013, 2001.
- [3] LABORDE, P.; POMMIER J.; RENARD Y.; SALAÛN, M. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 64, p. 354-381, 2005.
- [4] CHEN, W. F.; HAN, D.J. *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [5] NOOR, A. K. Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.2, p. 333-346, 1986.
- [6] DUARTE, C. A.; KIM, D. J. Analysis and applications for a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, p. 487-504, 2008.

- [7] KIM, D. J.; DUARTE, C. A.; PROENÇA, S. P. Generalized finite element method with global-local enrichments for nonlinear fracture analysis. *Mechanics of Solids in Brazil*, 2009.
- [8] KIM, D. J.; DUARTE, C. A.; PROENÇA, S. P. A generalized finite element method with global-local enrichment functions for combined plasticity problems. *Comput. Mech.*, 2012.
- [9] TORRES, D. A. F., BARCELLOS, C. S., MENDONÇA, P. T. R. Effects of the smoothness of partitions of unity on the quality of representation of singular enrichments for GFEM/XFEM stress approximations around brittle cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, p. 243–279, 2015.
- [10] BARCELLOS, C.S.; MENDONÇA, P.T.R.; DUARTE, C. A. A  $C^k$  continuous generalized finite element formulation applied to laminated Kirchhoff plate model. *Compt. Mech.*, v. 44, p. 377-393, 2009.
- [11] MENDONÇA, P. T. R.; BARCELLOS, C. S.; TORRES, D. A. Analysis of anisotropic Mindlin plate model by continuous and non-continuous GFEM. *Finite Elements in Analysis and Design*, n. 47, p. 698-717, 2011.
- [12] MENDONÇA, P. T. R.; BARCELLOS, C. S.; TORRES, D. A. Robust  $C^k/C^0$  generalized FEM approximations for higher-order conformity requirements: Application to Reddy's HSDT model for anisotropic laminated plates. *Composite Structures*, v. 96, p. 332–345, 2013.
- [13] SURANA, K. S.; AHMADI, A. R.; REDDY, J. N. The k-version of finite element method for self-adjoint operators in bvp. *International Journal of Computational Engineering Science*, v. 3, p. 155–218, 2002.
- [14] TORRES, D. A. F. Contribuições sobre a utilização de funções de aproximação contínuas no método generalizado de elementos fini-

- 
- tos: Avaliação em mecânica da fratura. Tese, Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.
- [15] FREITAS, A.; TORRES, D. A. F.; MENDONÇA, P. T. R.; BARCELLOS, C. S. Comparative analysis of Ck- and C0-GFEM applied to two-dimensional problems of confined plasticity. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2015 (in press).
- [16] BABUSKA, I.; SURI, M. The p- and h-p versions of the Finite Element Method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80, 5-26, 1990.
- [17] TURNER, M.; CLOGH, D.; MARTIN, H.; TOPP, L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronaut. Sci.* 23, 805-823, 1956.
- [18] SZABÓ, B.; BABUSKA, I. *Finite element analysis*. John Wiley & Sons, New York, 368 p., 1991.
- [19] KIM, D. J.; DUARTE, C. A.; PEREIRA, J. P. Analysis of interacting cracks using the generalized finite element method with global-local enrichment functions. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 75(5), 12 pages, 2008.
- [20] BELYTSCHKO, T.; LU Y.Y.; GU, L.U. Element-free Galerkin methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 37 (1994) 229–256.
- [21] STROUBOULIS, T.; ZHANG, L.; WANG, D.; BABUSKA, I. A posteriori error estimation for generalized finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 852-879, 2006.
- [22] DUARTE, C. A.; KIM, D. J.; QUARESMA D. M. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, p. 33-56, 2006.

- [23] HÄUSLER, S.M.; LINDHORST, K.; HORST, P. Combination of the material force concept and the extended finite element method for mixed mode crack growth si-mulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010.
- [24] BABUSKA, I.; MELENK, J.M. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40,727–758, 1997.
- [25] BABUSKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 31, p. 945–981, 1994.
- [26] MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 289-314, 1996.
- [27] BABUSKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J.E. Survey of meshless and generalized finite element methods: a unified approach. *Acta Numer.* 12 (May) 1-125, 2003.
- [28] BELYTSCHKO, T.; KRONGAUZ, Y.; ORGAN, D.; FLEMING, M. Meshless me-thods: An overview and recent developments. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139, 3-47, 1996.
- [29] LISZKA, T.; ORKISZ, J. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its applications in applied mechanics. *Computers & Structures*, v.11, n. 3-4, p. 83-95, 1980.
- [30] LISZKA, T.; ORKISZ, J. Finite difference method for arbitrary irregular meshes in nonlinear problems of applied mechanics, in: *IV SMiRt*, San Francisco, 1977.
- [31] PERRONE, N.; KAO, R. A general finite difference method for arbitrary meshes. *Computers & Structures*, v.5, p. 45-58, 1975.

- 
- [32] TWORZYDLO, W. Analysis of large deformations of membrane shells by the generalized finite difference method. *Comput. Struct.* 27 (1) 39–59, 1987.
- [33] TWORZYDLO, W. The FDM in arbitrary curvilinear coordinates—formulation, numerical approach and applications. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 28, 261–277, 1989.
- [34] DUARTE, C. A. The hp-cloud method. Tese (Doutorado) — The University of Texas at Austin, 1996.
- [35] DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using cloud. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 237–262, 1996.
- [36] DUARTE, C.A.; ODEN, J.T. Hp clouds - An *hp* meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, v. 12, pp. 673–705, 1996.
- [37] DUARTE, C. A.; BABUSKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems. *Computer Structures*, v. 77, p. 215-232, 2000.
- [38] STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I; COPPS, K. The design and analysis of generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, p. 43-69, 2000.
- [39] STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 4081–4193, 2001.
- [40] ODEN, J.T.; DUARTE, C.A.M.; ZIENLIEWICZ, O.C. A new cloud-based hp finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v.153, p. 117-126, 1998.
- [41] BABUSKA, I; BANERJEE, U.; OSBORN, J.E. Generalized finite element methods - main ideas, results and perspective. *International Journal of Computational Methods*, v. 1, n. 1, p. 67-103, 2004.

- [42] DUARTE, C. A.; KIM, D. J.; BABUSKA, I. Advances in Meshfree Techniques - Computational Methods in Applied Sciences, Vol. 5, V. M.A. Leitão, C. J. S. Alves, and C. A. Duarte, eds., Springer, The Netherlands, pp. 1–26, 2007.
- [43] STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 4081-4193, 2001.
- [44] BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modeling and Simulation in Material Sciences and Engineering*, v. 17, p.043001, 2009.
- [45] FRIES, T.P.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010.
- [46] ABDELAZIZ, Y.; HAMOUINE, A. A survey of the extended finite element. *Computers and Structures*, v. 86, p. 1141–1151, 2008.
- [47] BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 45, p. 601–620, 1999.
- [48] DOLBOW, J.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 36, p. 235-260, 2000.
- [49] MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 46, p. 131-150, 1999.
- [50] SUKUMAR, N.; MOES, N.; MORAN, B.; BELYTSCHKO, T. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 48, p. 1549–1570, 2000.

- 
- [51] DUARTE, C. A.; MIGLIANO, C. A.; BAKER, E.B. A technique to combine meshfree and finite element-based partition of unity approximations. (Department of Civil and Environmental Engineering - University of Illinois at Urbana - Champaign) Structural Research Series 638, 2005.
- [52] HUERTA, A.; FERNANDEZ-MENDEZ, S. Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 48, 1615–1636, 2000.
- [53] EDWARDS, H. C.  $C^\infty$  finite element basis functions. Technical Report, TICAM Report 96-45, The University of Texas at Austin, 1996.
- [54] GUPTA, V.; KIM, D. J.; DUARTE, C. A. Analysis and improvements of global-local enrichments for the Generalized Finite Element Method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 245-246, p. 47-62, 2012.
- [55] KIM, D. J.; PEREIRA, J. P.; DUARTE, C. A. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 81, p. 335-365, 2010.
- [56] KWON, Y. W.; BANG, H. The finite element method using MATLAB. CRC Press LLC, New York, 1997.
- [57] SORIANO, H. L. Método dos elementos finitos em análise de estruturas. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
- [58] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. 6 ed. Elsevier, Oxford, 2005.
- [59] ODEN, J. T.; REDDY, J.N. An introduction to the mathematical theory of finite elements. John Willey & Sons, Inc., New York, 1976.



- [60] SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. 1. ed. John Wiley & Sons, 2008.
- [61] SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 48, p. 101-118, 1985.
- [62] DUARTE, C. A. et al. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 2227–2262, 2001.
- [63] STROUBOULIS, T.; ZHANG, L.; BABUSKA, I. Generalized finite element method using mesh-based handbooks: application to problems in domains with many voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, p. 3109–3161, 2003.
- [64] BARROS, F. B.; PROENÇA, S. P. B.; BARCELOS, C. S. de. Generalized finite element method in structural nonlinear analysis - a p-adaptative strategy. *Computational Mechanics*, v. 33, p. 95-107, 2004.
- [65] BABUSKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J.E. On principles for a selection of shape functions Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, p. 5595-5629, 2002.
- [66] MALAGU, M.; BENVENUTI, E.; DUARTE, C. A.; SIMONE, A. One-dimensional nonlocal and elasticity: Assessment of high order approximation schemes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 275, p. 138-158, 2014.
- [67] SHEPARD, D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. *Proceedings of the 23rd ACM National Conference - ACM'68*, 517-524, New York, USA, 1968.

- 
- [68] LIU, G. R. Mesh free methods: moving beyond the finite element method. Boca Raton: CRC Press, 691 p., 2003.
- [69] SHAPIRO, V. Theory of R-Functions and applications: a primer technical report TR91-1219, Computer Science Department, Cornell University, Ithaca, NY.
- [70] BARROS, F. B.; BARCELLOS, C. S. de; DUARTE, C. A. p-adaptative  $C^k$  generalized finite element method for arbitrary polygonal clouds. Computational Mechanics, v. 41, p. 175-187, 2007.
- [71] RVACHEV, V. L.; SHEIKO, T. I. R-Functions in Boundary Value Problems in Mechanics. Applied Mechanics Reviews, v. 48, p. 151-188, 1995.
- [72] PLEWS, J. A.; DUARTE, C. A. Bridging multiple structural scales with a generalized finite element method. Int. J. Numer. Meth. Engng, Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com). DOI: 10.1002/nme.4703, 2014.
- [73] GUPTA, PEREIRA, J. P. A.; KIM, D. J.; DUARTE, C. A.; EASON, T. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems - a non-intrusive approach using a generalized finite element method. Engineering Fracture Mechanics, v. 90, p. 41-64, 2012.
- [74] O'HARA, P.; DUARTE, C.A; EASON, T. Transient analysis of sharp thermal gradients using coarse finite element meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 200, p. 812-829, 2011.
- [75] O'HARA, P.; DUARTE, C.A; EASON, T. Generalized finite element analysis of three-dimensional heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 198, p. 1857-1981, 2009.

- [76] PEREIRA, J. P. A.; KIM, D. J.; DUARTE, C. A. A two-scale approach for the analysis of propagating three-dimensional fractures. *Comput. Mech.*, v. 49, p. 99-121, 2012.
- [77] OWEN, D. R. J.; HINTON, E. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. 2. ed. Pineridge Press Limited, Swansea, 1986.
- [78] SIMO, J. C.; HUGHES T. J. R. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [79] SZABÓ, B.; BABUSKA, I. *Introduction to finite element analysis: formulation, verification and validation*. Chichester, United Kingdom: Wiley, 372 p., 2011.
- [80] WANDZURA, S.; XIAO, H. Symmetric quadrature rules on a triangle. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 45, p. 1829 – 1840, 2003.
- [81] ANDERSON, T.L. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. 3. ed. Taylor & Francis Group, New York, 2005.
- [82] COTTEREAU, R.; DÍEZ, P. and HUERTA, A. Strict error bounds for linear solid mechanics problems using a subdomain-based flux-free method. *Comput. Mech.*, v. 44, p. 533-547, 2009.
- [83] DÍEZ, P., PARÉS, N. and HUERTA, A. Accurate upper and lower error bounds by solving flux-free local problems in “stars”. *Revue européenne des éléments finis*, v. 13, p. 497-507, 2004.
- [84] PARÉS, N.; DÍEZ, P. and HUERTA, A. Subdomain-based flux-free a posteriori errors estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 297-323, 2006.
- [85] PRUDHOMME, S., NOBILE, F., CHAMOIN, L. and ODEN, J.T. Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, v. 20(2), p. 165 - 192, 2004.

- [86] LADEVÈZE, P; MAUNDER E. A. W. A general method for recovering equilibrating element tractions. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 137, p. 111–151, 1996.
- [87] YAZID, A.; ABDELKADER,N.; ABDELMADJID, H. A state-of-the-art review of the X-FEM for computational fracture mechanics. *Applied Mathematical Modeling*, v. 33, p. 4269-4282, 2009.
- [88] RAO, B. N.; RAHMAN, S. An enriched meshless method for nonlinear fracture mechanics. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, v. 59, p. 197-223, 2004.
- [89] ELGUEDJ, T.; GRAVOUIL, A.; COMBESCURE, A. Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 501-515, 2006.



# Apêndice A

## Descontinuidade em MEFG: trincas

Modelar descontinuidades com o MEF é incômodo devido à necessidade de atualizar a topologia da malha para coincidir com a geometria da descontinuidade, mesmo nas situações que são as mais comuns, em que a descontinuidade se desloca ou muda de forma ao longo da evolução do carregamento [48]. Isto ocorre porque as aproximações polinomiais seccionalmente diferenciáveis, usadas neste método, não são adequadas a estes tipos de problemas [87]. No contexto da mecânica dos sólidos, quando esta descontinuidade é relacionada a uma função, representa, por exemplo, uma trinca e quando relacionada a sua derivada, pode representar uma interface material [2].

No caso de modelagem de trincas, a singularidade da ponta da trinca precisa ser devidamente representada pela aproximação, o que no MEF clássico é realizado através do refinamento local da malha. No entanto, o número de graus de liberdade pode crescer drasticamente, especialmente em aplicações tridimensionais. Além disso, o cálculo incremental de um crescimento de trinca precisa frequentemente de remalhamento e reprojetar a solução obtida em uma nova malha não é somente uma operação custosa [45], mas também pode ter um problemático impacto na qualidade dos resultados [3].

Em resposta a estas deficiências do MEF convencional, utiliza-se o MEFG com funções de enriquecimento singulares e descontínuas, onde as descontinuidades podem atravessar elementos de qualquer maneira, reduzindo a necessidade de remalhamento, usando-se malhas fixas e simples. Esta característica é bastante útil para problemas de evolução de trincas e de avanço de frente de zona plastificada, por exemplo.

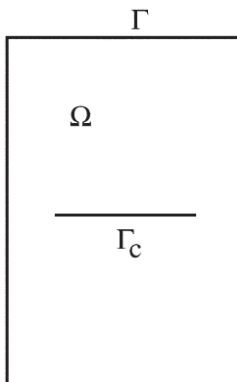
Para métodos enriquecidos, faz-se a distinção entre enriquecimentos em todo o domínio ou apenas em sub-regiões locais. Enriquecimentos globais são usados quando a solução pode ser considerada globalmente não suave, como nos casos de solução ondulatória de alta frequência. No entanto, muitas soluções com propriedades não suaves, tais como descontinuidades, linhas com singularidades e singularidades pontuais, são fenômenos locais e, então, é natural aplicar o enriquecimento em subdomínios locais, atingindo um subconjunto de nós [45].

No contexto da mecânica da fratura elástica linear (MFEL), o enriquecimento é aplicado na vizinhança da trinca, com campos assintóticos próximos à ponta da trinca e funções descontínuas para representar a descontinuidade no deslocamento através da linha da trinca. Esta técnica explora a propriedade da partição da unidade citada em [26], permitindo que funções de enriquecimento locais sejam facilmente incorporadas na aproximação de elementos finitos. Desta forma, a aproximação padrão de EF é enriquecida na região de interesse por funções locais em conjunção com graus de liberdade adicionais [49].

A seguir, são revisadas as equações que governam um problema bidimensional de elasticidade linear, com material homogêneo isotrópico num domínio trincado  $\Omega$  [49].

Considera-se o domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  limitado por  $\Gamma$  (Figura A.1).

O contorno  $\Gamma$  é composto dos conjuntos  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  e  $\Gamma_c$ , tais que  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_c$ ,  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  ( $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ) são as partes do contorno nas quais são definidas, respectivamente, as condições de Dirichlet e Neumann e  $\Gamma_c$  é a linha da trinca cujas superfícies internas são livres de tração. As equações de equilíbrio e condições de contorno são:



**Figura A.1:** Domínio trincado.

$$\begin{aligned}
 \nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega, \\
 \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{em } \Gamma_D, \\
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{em } \Gamma_N, \\
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} && \text{em } \Gamma_{c^+} \text{ e } \Gamma_{c^-},
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

em que  $\mathbf{n}$  é o vetor normal externo à  $\Gamma_N$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões de Cauchy,  $\mathbf{b}$  é o vetor de forças de corpo,  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$  são deslocamentos e trações prescritas, respectivamente. Aqui, são considerados pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

A forma variacional do problema pode ser colocada como:

Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}(\Omega)$  tal que:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) l_z dx dy = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} l_z dx dy + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} l_z ds, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \tag{A.2}$$

sendo  $\mathbf{U}$  o espaço das funções cinematicamente admissíveis:

$$\mathbf{U} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{X} : \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_D \text{ e descontínua em } \Gamma_c \} \tag{A.3}$$

e  $\mathbf{V}$  o espaço de funções teste:



$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X} : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \text{ e descontínua em } \Gamma_c\}, \quad (\text{A.4})$$

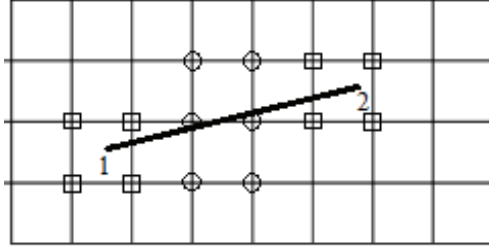
sendo que  $\mathbf{X}$  está relacionado à regularidade da solução e  $l_z$  é a espessura do corpo elástico (na direção  $z$ ), considerado aqui como constante.

Uma característica particular das aproximações locais é a seleção apropriada dos nós a serem enriquecidos e a escolha das funções de enriquecimento correspondentes. Tipicamente, o enriquecimento localizado reduz o número de nós enriquecidos, ou seja, enriquece nós em um subconjunto  $N^* \subset N$ , onde  $N$  é o número de nós total do domínio.

No caso de trincas, dois conjuntos de nós são definidos para serem enriquecidos de forma diferente, os enriquecidos por funções descontínuas através da linha da trinca e aqueles enriquecidos por campos assintóticos próximos à ponta da trinca.

Para uma trinca cujas localizações das pontas 1 e 2 (Figura A.2) são denotadas pelas coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, e sua geometria é denotada por  $\Gamma_c$ , os conjuntos nodais enriquecidos são  $J$ ,  $K_1$  e  $K_2$  (contidos em  $N^*$ ). Os conjuntos  $K_1$  e  $K_2$  consistem dos nós cujo fechamento do suporte contém as pontas 1 e 2 da trinca, respectivamente, e são enriquecidos por funções assintóticas, já que os campos de tensões e deformações são singulares nestes pontos. O conjunto  $J$  consiste dos nós cujo suporte (não o fechamento do suporte) é interceptado pela trinca e não pertence a  $K_1$  ou  $K_2$  [49], sendo enriquecido por funções descontínuas. O suporte do nó  $i$ , representado por  $\omega_i$ , é o conjunto aberto dos elementos conectados ao nó e o seu fechamento  $\bar{\omega}_i$  é o conjunto fechado que inclui seu contorno [48].

Para materiais frágeis no contexto da mecânica da fratura elástica linear (MFEL), as aproximações das componentes do campo de deslocamentos  $u_h(\mathbf{x})$  têm a seguinte forma:



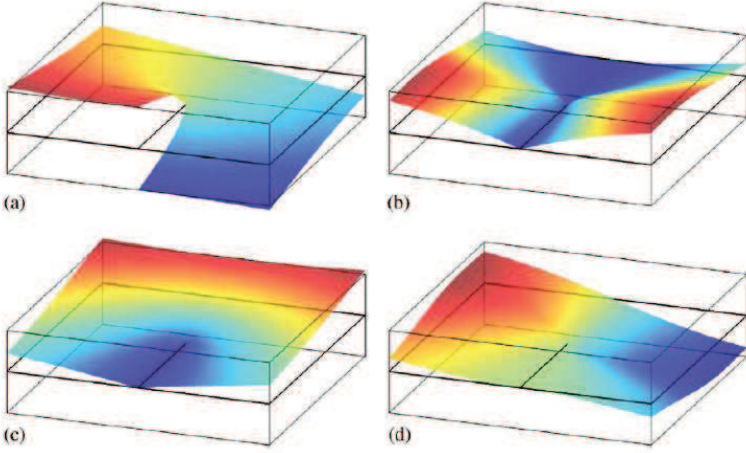
**Figura A.2:** Enriquecimento local. Os nós circulados são enriquecidos com a função salto (formam o conjunto  $J$ ) e os nós enquadrados com funções assintóticas (formam os conjuntos  $K_1$ , associado ao nó 1, e  $K_2$ , associado ao nó 2).

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} u_i \varphi_i + \sum_{j \in J} b_j \varphi_j H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in K_1} \varphi_k \left( \sum_{l=1}^{ne(k)} a_k^{l1} F_l^1(\mathbf{x}) \right) + \sum_{k \in K_2} \varphi_k \left( \sum_{l=1}^{ne(k)} a_k^{l2} F_l^2(\mathbf{x}) \right), \quad (\text{A.5})$$

em que  $u_i$  são os graus de liberdade clássicos (deslocamentos nodais) do nó  $i$ ,  $\varphi_i$  são as funções  $PU$  associadas ao nó  $i$ ,  $ne(k)$  é o número de funções de enriquecimento do nó  $k$  e  $b_j$ ,  $a_k^{l1}$  e  $a_k^{l2}$  são parâmetros nodais correspondentes às funções de enriquecimento  $H(\mathbf{x})$ ,  $F_l^1$  e  $F_l^2$ , respectivamente. A função  $H(\mathbf{x})$  é a *função de Heaviside*, descontínua através da linha da trinca e constante em cada um de seus lados, sendo definida num sistema de coordenadas locais como:

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{para } y > 0 \\ -1 & \text{para } y < 0 \end{cases},$$

onde os eixos locais são alinhados com a ponta da trinca, ou seja, o eixo local  $x$  é colinear à trinca e  $y$  é normal a ela. Os conjuntos  $F_l^1$  e  $F_l^2$  consistem das funções que geram campos assintóticos próximos às pontas das trincas 1 e 2, respectivamente, e são dadas por [47]:

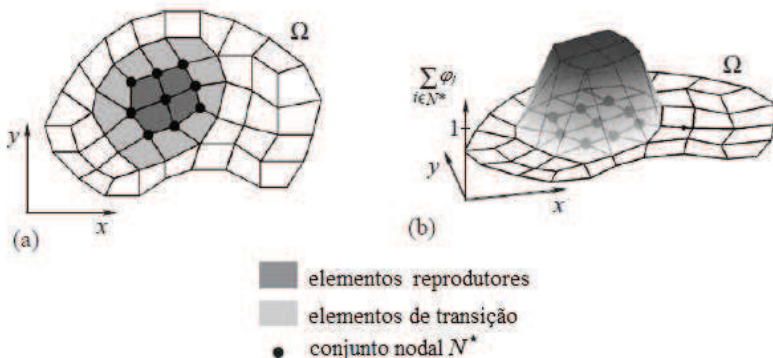


**Figura A.3:** Funções de enriquecimento  $F_l(\mathbf{x})$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , para a ponta da trinca para materiais frágeis no contexto da MFEL: (a)  $F_1(\mathbf{x})$ ; (b)  $F_2(\mathbf{x})$ ; (c)  $F_3(\mathbf{x})$  e (d)  $F_4(\mathbf{x})$ . (Fonte: [45]).

$$F_l(\mathbf{x}) = \left\{ \sqrt{r} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right); \sqrt{r} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right); \sqrt{r} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen}(\theta); \sqrt{r} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen}(\theta) \right\}, \quad (\text{A.6})$$

onde  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares locais cujo sistema tem origem na ponta da trinca e  $\theta$  é medido a partir de um eixo tangente à trinca existente. A representação gráfica da Equação (A.6) pode ser vista na Figura A.3. Nota-se que a primeira função na Equação (A.6) é descontínua através da trinca, sendo contínua e bem comportada no domínio em volta da descontinuidade. As outras três funções são contínuas e adicionadas para melhorar a precisão nos problemas de fratura elástica com malhas relativamente grosseiras [2]. Nota-se que estas funções de enriquecimento representam a descontinuidade no campo de deslocamentos e a singularidade em suas derivadas, uma vez que as tensões e as deformações são singulares, mas não os deslocamentos [45].

Quando são usados vários enriquecimentos por nó, precisa-se de



**Figura A.4:** Subconjunto nodal  $N^*$ ; (a) mostra os elementos reprodutores e de transição como uma consequência da escolha de  $N^*$ ; (b) mostra que as funções  $\varphi_j$  são uma  $PU$  nos elementos reprodutores, mas  $\sum_{j \in N^*} \varphi_j \neq 1$  nos elementos de transição.

cuidado especial para assegurar que o espaço de aproximação resultante ainda seja linearmente independente [45].

Os conjuntos  $K_1$  e  $K_2$  também podem ser aumentados de modo a incluir todos os nós dentro de um raio característico na ponta da trinca associada, onde supõe-se que a região dos campos assintóticos próximos à ponta da trinca dominem a solução [49].

Pelo fato de apenas um subconjunto de nós ser enriquecido, cada elemento do domínio é classificado da seguinte forma: (i) elemento não enriquecido, (ii) elemento reprodutor, se todos os nós do elemento são enriquecidos, ou (iii) elemento de transição, se alguns dos nós do elemento são enriquecidos. A Figura A.4 ilustra esta situação.

## A.1 Descontinuidade elastoplástica

Nos últimos anos, o MEF $G$  tem sido usado com sucesso na MFEL. Mas, no contexto da mecânica da fratura elastoplástica (MFEP), faz-se necessário identificar soluções assintóticas adequadas para enriquecer as bases das funções de aproximação, já que aquelas usadas na MFEL não

são apropriadas para resolver problemas de fratura não linear. Assim, a singularidade do campo na ponta da trinca na MFEP é diferente daquela da MFEL e depende das características do encruamento do material. Isto implica que as propriedades do material poderiam ser incorporadas no desenvolvimento de uma nova ou melhorada base de funções enriquecedoras [88].

Nos trabalhos de [89] e [88], usam-se campos HRR (Hutchinson-Rice-Rosengren) [81] para representar as singularidades plásticas. Esses campos HRR são aproximados por uma expansão de Fourier truncada, usada para extrair a base de enriquecimento elastoplástico. Também propõe-se adicionar estas funções de enriquecimento sobre uma partição da unidade ( $PU$ ) de nós livres de malha, para se ter flexibilidade quanto à dimensão da região enriquecida e fazer com que o efeito do enriquecimento seja desvinculado do grau de refinamento da malha, melhorando aspectos de convergência, como evidenciado por [3].

Considerando a lei de Ramberg-Osgood, que é usada para descrever a curva tensão-deformação não linear, e supondo as deformações elásticas negligenciáveis quando comparadas com a deformação plástica, tem-se a equação [88]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} a \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0}, \quad (\text{A.7})$$

que representa a lei de encruamento do material, onde  $a$  é uma constante do material,  $n$  é o expoente de encruamento do material,  $\varepsilon_0$  e  $\sigma_0$  são, respectivamente, as deformações e tensões de referência,  $\sigma_{eq}$  é a tensão equivalente de von Mises e  $s_{ij}$  é a parte deviatórica do tensor de tensões.

A Equação (A.7) leva aos campos HRR que são campos assintóticos na ponta da trinca. Assim, os campos de deslocamentos na ponta da trinca podem ser representados pelas funções HRR, geradas pela seguinte base

$$r^{1/(n+1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right); \cos \left( \frac{\theta}{2} \right); \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} (\theta); \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} (\theta); \\ \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} (3\theta); \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} (3\theta) \end{array} \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Desta forma, acrescentou-se  $\text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} (3\theta)$  e  $\cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} (3\theta)$  na base de funções de enriquecimento (Equação (A.6)), melhorando a aproximação. Os resultados de [88] indicam que a nova base de funções é capaz de capturar efetivamente deformações elastoplásticas em uma concentração de tensões. E, de acordo com [89], dentre outras bases, a Equação (A.8) é a melhor na análise de fratura elastoplástica para modo misto em MEEG, sendo acoplada a um esquema de iteração como o de Newton-Raphson (no cálculo do equilíbrio global) e um esquema de retorno radial para escoamento plástico (no cálculo das deformações plásticas irreversíveis).



## Apêndice B

# Plasticidade para estado plano de tensões

No caso de estado plano de tensões, como algumas componentes de tensão são prescritas ( $\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$ ), não se pode mais aplicar o algoritmo de integração tridimensional genérico, na qual todas as componentes de tensão são desconhecidas. Desta forma, pode-se utilizar um esquema implícito no qual são usadas equações constitutivas projetadas sobre tensões planas. As restrições são aplicadas em nível de ponto de Gauss.

Aqui, o esquema implícito utilizado é o modelo de von Mises projetado sobre tensões planas, com encruamento isotrópico linear. A seguir, apresenta-se o modelo e seu algoritmo de integração correspondente.

Relembrando que  $S$  é o espaço vetorial de tensores simétricos de quarta ordem, devido a sua simetria ele tem dimensão igual a seis ( $\dim[S] = 6$ ). Assim, o subespaço de tensões planas, denotado por  $S_p \subset S$ , é obtido de  $S$ , pela aplicação de três restrições adicionais, como  $S_p := \{\sigma \in S \mid \sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{13} = 0\}$ .

Similarmente, o subespaço dos tensores deviatóricos, denotado por  $S_D \subset S$ , é definido como  $S_D := \{\mathbf{s} \in S \mid s_{13} = s_{23} = 0, \text{tr}[\mathbf{s}] = s_{kk} = 0\}$ . Portanto,  $\dim[S_p] = \dim[S_D] = 3$ .

A notação vetorial para  $\sigma$  e  $\mathbf{s}$  é, respectivamente



$$\boldsymbol{\sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{12} \end{bmatrix}^T e \quad \mathbf{s} := \begin{bmatrix} s_{11} & s_{22} & s_{12} \end{bmatrix}^T.$$

Em notação matricial,  $\mathbf{s}$  é dado por  $\mathbf{s} := \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}$ , onde

$$\mathbf{P} := \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Os tensores de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon} \in S$ , na forma vetorial, são dados, respectivamente, por  $\boldsymbol{\varepsilon}^e := \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^e & \varepsilon_{22}^e & \gamma_{12}^e \end{bmatrix}^T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p := \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^p & \varepsilon_{22}^p & \gamma_{12}^p \end{bmatrix}^T$  e  $\boldsymbol{\varepsilon} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \gamma_{12} \end{bmatrix}^T$ .

Para comportamento elástico isotrópico linear, sabe-se que  $\gamma_{23}^e = \gamma_{31}^e = 0$  e  $\varepsilon_{33}^e = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e)$ . Além disso, da incompressibilidade plástica, tem-se  $\varepsilon_{33}^p = -(\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p)$  e como  $s_{13} = s_{23} = 0$ , segue que  $\varepsilon_{13}^p = \varepsilon_{23}^p = 0$ . Portanto,  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^e + \varepsilon_{33}^p$ .

Assim, as equações do modelo de von Mises projetado sobre tensões planas, com encruamento isotrópico linear, são dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p],$$

$$f := \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} - (\sigma_y + H' \alpha),$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}},$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\varepsilon}_{ac}^p = \gamma,$$

$$\gamma \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \gamma f = 0,$$

onde  $\mathbf{C}$  é matriz constitutiva elástica para o estado plano de tensões,

dada por (2.9).

Para a construção do algoritmo de integração, é mais conveniente usar a forma quadrática da função de escoamento. Logo, faz-se a seguinte substituição:

$$f := \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} (\sigma_y + H' \alpha)^2,$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{B.2})$$

$$\dot{\alpha} = \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}.$$

## B.1 Algoritmo de integração e mapeamento de retorno

O algoritmo de integração para o modelo de von Mises projetado sobre tensões planas é análogo ao caso tridimensional, iniciando-se pelo estado teste:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}; \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}} = \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p); \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{teste} &= \boldsymbol{\alpha}_n; \quad f_{n+1}^{teste} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste})^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste} - \frac{1}{3} (\sigma_y + H' \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{teste})^2. \end{aligned}$$

Caso seja verificada a evolução da plastificação, ocorre o estado corretor plástico (etapa de correção). Para isto, inicialmente faz-se necessário obter uma relação entre as tensões  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste}$ , a partir da relação constitutiva  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} := E (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$ , obtendo-se:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{A} (\Delta \gamma) \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste}, \quad (\text{B.3})$$

com  $\mathbf{A} (\Delta \gamma) = \boldsymbol{\Xi} (\Delta \gamma) \mathbf{C}^{-1}$ , onde  $\boldsymbol{\Xi} (\Delta \gamma) = (\mathbf{C}^{-1} + \Delta \gamma \mathbf{P})^{-1}$  representa uma matriz tangente elástica (algorítmica) modificada.

Para o caso de elasticidade isotrópica, a matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  e a matriz projeção  $\mathbf{P}$  têm os mesmos subespaços característicos, ou seja,

estas matrizes possuem os mesmos autovetores e portanto, são facilmente diagonalizáveis. Assim, aplicando a transformação ortogonal:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtém-se as seguintes representações diagonais para  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{P}^* \equiv \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{C}^* \equiv \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \nu & 0 \\ \nu & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

E, nesta mesma base, a expressão para  $\mathbf{A}(\Delta\gamma)$  pode ser simplificada, com a seguinte representação diagonal:

$$\mathbf{A}^*(\Delta\gamma) \equiv (\mathbf{C}^{*-1} + \Delta\gamma\mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{C}^{*-1} = \begin{bmatrix} \frac{3(1-\nu)}{3(1-\nu) + E\Delta\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2\mu\Delta\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+2\mu\Delta\gamma} \end{bmatrix}.$$

A correspondente representação vetorial para as componentes do tensor tensão teste (notação de Voigt) é:

$$\sigma_{n+1}^{teste*} \equiv \mathbf{Q} \sigma_{n+1}^{teste} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_{11}^{teste} + \sigma_{22}^{teste}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_{22}^{teste} - \sigma_{11}^{teste}) \\ \sigma_{12}^{teste} \end{bmatrix}.$$

Utilizando-se as transformações acima, o multiplicador plástico de Lagrange  $\Delta\gamma$  é determinado forçando-se a condição de consistência no

tempo  $t_{n+1}$ , ou seja, fazendo-se

$$f_{n+1} := \frac{1}{2}\xi_{n+1}(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \left[ \sigma_y + H' \left( \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}\xi_{n+1}(\Delta\gamma)} \right) \right]^2 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_{n+1}(\Delta\gamma) &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ &= (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste})^T \mathbf{A}^T(\Delta\gamma) \mathbf{P} \mathbf{A}(\Delta\gamma) \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste} \\ &= (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste*})^T (\mathbf{A}^*)^2 \mathbf{P}^* \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste*} \\ &= \frac{(\sigma_{11}^{teste} + \sigma_{22}^{teste})^2}{6 \left[ 1 + \frac{E\Delta\gamma}{3(1-\nu)} \right]^2} + \frac{(\sigma_{22}^{teste} - \sigma_{11}^{teste})^2 + 2(\sigma_{12}^{teste})^2}{(1 + 2\mu\Delta\gamma)^2}. \end{aligned}$$

Para atualizar a fórmula dada pela Equação (B.3),  $\mathbf{A}(\Delta\gamma)$  pode ser expressa na simples forma explícita:

$$\mathbf{A}(\Delta\gamma) \equiv \mathbf{Q}^T \mathbf{A}^*(\Delta\gamma) \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{11}^* + \mathbf{A}_{22}^*) & \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{22}^*) & 0 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{A}_{22}^*) & \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{11}^* + \mathbf{A}_{22}^*) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33}^* \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Assim, tem-se o seguinte algoritmo para elastoplasticidade em estado plano de tensões com encruamento isotrópico linear:

1) Calcula estado teste (preditor elástico):

Dado  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  e as variáveis de estado em  $t_n$ , calcula o estado elástico teste

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ teste} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}; \quad \alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n; \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ teste}$$

2) Testa consistência plástica:

$$\zeta_{n+1}^{teste} = \frac{1}{6} (\sigma_{11}^{teste} + \sigma_{22}^{teste})^2 + \frac{1}{2} (\sigma_{22}^{teste} - \sigma_{11}^{teste})^2 + 2(\sigma_{12}^{teste})^2$$

$$\text{se } f_{n+1}^{teste} : = \frac{1}{2}\xi_{n+1}^{teste} - \frac{1}{3} \left[ \sigma_y + H' \left( \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}\xi_{n+1}^{teste}} \right) \right]^2 \leq 0,$$

(então passo elástico)

o conjunto  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}$  e  $C_{n+1}^{ep} = C$ ,

finaliza.

Senão (passo plástico, vá para (3)).

3) Mapeamento de retorno (estado de correção):

Impõe-se a condição

$$f_{n+1} := \frac{1}{2}\xi_{n+1}(\Delta\gamma) - \frac{1}{3} \left[ \sigma_y + H' \left( \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}\xi_{n+1}(\Delta\gamma)} \right) \right]^2 = 0$$

Para resolver esta equação em  $\Delta\gamma$ , pode-se usar novamente o esquema iterativo de Newton-Raphson.

4) Atualização das variáveis

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \mathbf{A}(\Delta\gamma) \sigma_{n+1}^{teste}; \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}\xi_{n+1}(\Delta\gamma)}; \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \mathbf{P} \sigma_{n+1} \end{aligned}$$

5) Calcula o módulo tangente elástico (algorítmico) modificado

$$\Xi(\Delta\gamma) = (\mathbf{C}^{-1} + \Delta\gamma \mathbf{P})^{-1}$$

6) Calcula o operador tangente elastoplástico algorítmico:

$$\mathbf{C}^{ep} = \Xi - \frac{(\Xi \mathbf{P} \sigma_{n+1}) \otimes (\Xi \mathbf{P} \sigma_{n+1})}{\sigma_{n+1}^T \mathbf{P} \Xi \mathbf{P} \sigma_{n+1} + \frac{2\xi H'}{3-2H'\Delta\gamma}}$$

7) Atualiza a deformação  $\varepsilon_{33_{n+1}}$

$$\varepsilon_{33_{n+1}} = \varepsilon_{33_{n+1}}^e + \varepsilon_{33_{n+1}}^p$$

$$\varepsilon_{33_{n+1}}^e = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \varepsilon_{11_{n+1}}^e + \varepsilon_{22_{n+1}}^e \right) = -\frac{\nu}{E} \left( \sigma_{11_{n+1}} + \sigma_{22_{n+1}} \right)$$

$$\varepsilon_{33_{n+1}}^p = -\left( \varepsilon_{11_{n+1}}^p + \varepsilon_{22_{n+1}}^p \right)$$

Finaliza.